MÈTODES MATEMÀTICS AVANÇATS

Emili Elizalde

Juny del 2003

MÈTODES MATEMÀTICS AVANÇATS

CURS DE DOCTORAT

Emili Elizalde

Institut de Ciències de l'Espai (ICE)
Consell Superior d'Investigacions Científiques (CSIC)
&
Institut d'Estudis Espacials de Catalunya (IEEC)
Edifici Nexus, Gran Capità 2-4, 08034 Barcelona

E-mail: elizalde@ieec.fcr.es, elizalde@math.mit.edu,
http://www.ieec.fcr.es/recerca/cme/eli.html

Versió 1.0

05/06/03

A la meva mare, a poc a poc

Pròleg

Aquest Curs de Doctorat ha estat impartit, durant uns quants anys, al Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria i al Departament de Física Fonamental, ambdós de la Facultat de Física, Universitat de Barcelona, dins dels seus respectius Plans de Doctorat, que finalment s'han unificat en un Pla comú als dos Departaments —el Pla de Doctorat de Física Avançada. Ha estat donat darrerament, sense interrupció, en cada un dels Biennis compresos entre 1996 i 2003.

També ha rebut estudiants d'altres Departaments de la Universitat de Barcelona (Facultats de Física i de Matemàtiques) i de la Universitat Autònoma de Barcelona, havent figurat sempre com a assignatura optativa d'aquests altres Plans de Doctorat.

L'autor agraeix als nombrosos estudiants que han passat pel Curs les seves encertades preguntes, crítiques i comentaris, tots els quals han contribuït decisivament a fer millor la versió que ara es presenta.

Barcelona, cinc de juny del dos mil tres

E.E.

Índex

CAPíTOL 1

VARIETATS DIFERENCIABLES

1.1. Definició de varietat diferenciable

1.1.1. Varietat topològica.

1.1.1.1. *Espai topològic.* Sigui X un conjunt arbitrari. Una topologia, $\mathcal{T}$, a X és una família de subconjunts de X, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}(X)$ és la família de tots els subconjunts de X, el conjunt de parts de X), que satisfà:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
(2) $X_1, X_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathcal{T}$;
(3) $X_i \in \mathcal{T}, \forall\, i \in I \Longrightarrow \cup_{i\in I} X_i \in \mathcal{T}$;

on I és un conjunt arbitrari d'índexs. Per definició, els conjunts que són de $\mathcal{T}$ es diuen oberts. Un conjunt, C es diu tancat si el seu complementari és obert, *i.e.,* si $X \setminus C \in \mathcal{T}$ ($\setminus$ és la diferencia, en teoria de conjunts).

La parella formada pel conjunt, X, i una topologia, $\mathcal{T}$, rep el nom d'espai topològic $(X, \mathcal{T})$.

Exemples.

(1) La topologia discreta $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Aquí tot subconjunt de X és a l'hora obert i tancat.
(2) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Aquí els únics subconjunts de X que són oberts o tancats són el buit i el total (el propi X).

Exercicis.

(1) Demostrar que tot interval obert (a, b) de la recta real, $a, b \in \mathbb{R}$, es pot posar com la unió d'un nombre infinit numerable d'intervals tancats.
(2) Demostrar que tot interval tancat $[a, b]$ de la recta real es pot posar com l'intersecció d'un nombre infinit numerable d'intervals oberts.
(3) A $\mathbb{R}^n$, la bola de centre $x \in \mathbb{R}^n$ i radi $r \in \mathbb{R}^+$ és el conjunt

$$\boxed{B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\},}$$

on d és la distància euclidiana:

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.}$$

Considerem ara la família $\mathcal{T}_1$ de subconjunts de $\mathbb{R}^n$ tals que cada un d'ells, $A \in \mathcal{T}_1$, satisfà: $\forall x \in A, \exists\, r > 0$, tal que $B_r(x) \subset A$. Es tracta de demostrar que $\mathcal{T}_1$ és una topologia. (Aquest és l'exemple originari de tota la teoria general d'espais topològics.)

(4) Seguim a $\mathbb{R}^n$, l'$n-$cub de centre $x \in \mathbb{R}^n$ i costat $r \in \mathbb{R}^+$ és el conjunt

$$\boxed{C_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < r/2,\ i = 1, \ldots, n\}.}$$

Considerem ara la família $\mathcal{T}_2$ de subconjunts tals que cada un d'ells, $B \in \mathcal{T}_2$, satisfà: $\forall x \in B, \exists\, r > 0$, tal que $C_r(x) \subset B$. Es tracta de demostrar que $\mathcal{T}_2$ és una topologia.

(5) Demostrar ara que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. És a dir, l'espai topològic que obtenim en ambdós casos és el mateix.

(6) Tornem al concepte general i considerem un espai topològic, $(X, \mathcal{T})$. Donat un subconjunt qualsevol $S \subset X$, podem definir una topologia, $\mathcal{T}'$ a S de la manera següent:

$$B \in \mathcal{T}' \iff \exists\, A \in \mathcal{T} \text{ tal que } B = A \cap S.$$

És a dir, els oberts de S són les interseccions amb S dels oberts de X. Demostrar que $\mathcal{T}'$ és una topologia (rep el nom de topologia relativa).

(7) En el cas d'un interval real tancat, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, esbrinar com són els oberts de la topologia relativa que prové de la topologia ordinària de $\mathbb{R}$. Id. id. en el cas d'una bola tancada a $\mathbb{R}^n$.

Definicions: entorn, base, e.t. Hausdorff, i els axiomes de numerabilitat.

(1) Entorn. Sigui $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Es diu que U_x és un entorn [*entourage, voisinage, neighborhood, Umgebung*] de $x \in X$, si $\exists\, A \in \mathcal{T}$, tal que $x \in A \subset U_x$.

(2) Base de la topologia. Una familia d'oberts, $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}, B_j \in \mathcal{T}, \forall J \in J$, es diu que constitueix una base de l'espai topològic $(X, \mathcal{T})$ sii tot obert, $A \in \mathcal{T}$, es pot expresar com a unió d'alguns dels B_j. Es diu també que $\mathcal{B}$ engendre $\mathcal{T}$.

(3) E.t. Hausdorff. L'espai topològic es diu que és Hausdorff si a punts diferents s'els hi pot assignar entorns disjunts:

$$\boxed{\forall x, y \in X,\ \text{tal que } x \neq y,\ \exists\, U_x, U_y,\ \text{tal que } U_x \cap U_y = \emptyset.}$$

(4) Primer axioma de numerabilitat. Es diu que $\mathcal{T}$ satisfà el primer axioma de numerabilitat sii per a tot punt $x \in X$ hi ha una successió numerable d'entorns oberts d'x, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que per a qualsevol entorn U d'x sempre n'hi ha un d'aquests dins d'U. L'espai topològic definit per la recta real amb la topologia engendrada pels conjunts següents: els conjunts d'un sol punt de la recta, excepte l'origen, i els complementaris dels conjunts de punts finits, és de Hausdorff però no satisfà el primer axioma de numerabilitat (veure-ho, com a *exercici*).

(5) Segon axioma de numerabilitat. Es diu que $\mathcal{T}$ satisfà el segon axioma de numerabilitat sii admet una base numerable (finita o infinita). Exemple: $\mathbb{R}^n$ amb la topologia de les boles obertes (*demostrar-ho*, basant-se en el fet que $\mathbb{Q}^n$, que és numerable, és dens a $\mathbb{R}^n$). El semipla superior, espai topològic definit per la base d'oberts següent: interiors dels cercles del semipla superior i interiors dels cercles d'aquest semipla tangents a l'eix x amb el seu punt de tangència afegit, no satisfà el segon axioma de numerabilitat (demostrar-ho, com a *exercici*).

Exercici. Sigui X la unió de dues còpies de la semirecta $(-\infty, 0]$ amb la semirecta $(0, +\infty)$ (queden unides pel punt 0, veure la Fig. 1.1), amb la topologia ordinària en cada cas. Demostrar que X és un espai topològic pero que no és Hausdorff.

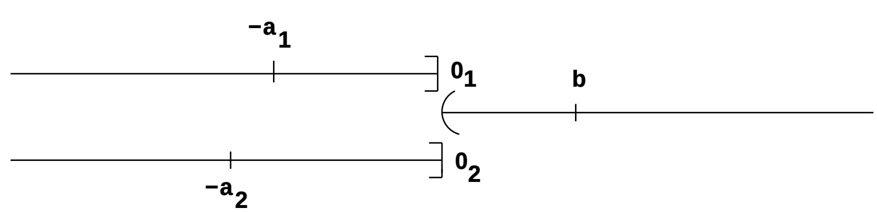


FIGURA 1.1. Un exemple d'espai topològic que no és Hausdorff.

1.1.1.2. *Conjunts compacte, localment compacte i paracompacte.*

(1) Recordem que en un espai topològic, $(X, \mathcal{T})$, un conjunt compacte, $K \subset X$, és aquell tal que, donat qualsevol recobriment de K per oberts:

$$\{A_i\}_{i\in I}\,, \quad A_i \in \mathcal{T}, \qquad K \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

(on I és un conjunt d'índexs arbitrari), se'n pot extreure sempre un subrecobriment finit:

$$\exists\{i_1,\ldots,i_m\}, \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_{i_j}.$$

En el cas de $\mathbb{R}$ amb la topologia ordinària, aquesta definició coincideix amb la usual allí: $K \subset \mathbb{R}$ és compacte si és tancat i fitat (veure-ho com a *exercici*).

(2) Un conjunt localment compacte, $L \subset X$, satisfà que tot punt $y \in L$ admet un entorn, U_y compacte.

(3) Un conjunt paracompacte, $P \subset X$, és aquell tal que és Hausdorff i donat qualsevol recobriment de P per oberts se'n pot extreure sempre un subrecobriment localment finit, això és (en la mateixa nomenclatura del cas precedent), per a tot punt $p \in P$, existeix un entorn U_p que queda recobert amb un nombre finit d'oberts del recobriment.

Aquest concepte serà molt important a l'hora de construir la teoria de la integració en varietats, com també per a definir una connexió en una varietat o un fibrat, doncs ens dóna la condició genèrica que ha de satisfer l'espai topològic base (la varietat) per poder-hi edificar aquestes teories.

Evidentment, tot compacte és paracompacte (veure-ho com a *exercici*).

1.1.1.3. *Aplicació contínua. Homeomorfisme.* Una aplicació contínua és un morfisme dins de la categoria[1] dels espais topològics. En altres paraules, és un morfisme d'espais topológices, és a dir, una aplicació entre els conjunts que ens transporta l'estructura (en aquest cas, la topologia). De manera precisa: donats dos espais topològics, $(X_1,\mathcal{T}_1)$ i $(X_2,\mathcal{T}_2)$,

$$f : X_1 \longrightarrow X_2,$$

és una aplicació contínua si

$$\boxed{f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1},$$

[1]Recordem que una categoria està formada per *objectes* i *morfismes* entre aquests objectes, i.e., aplicacions que transporten l'estructura dels objectes (ex. conjunts i aplicacions qualsevol, grups i homomorfismes de grup, espais vectorials i aplicacions lineals, espais topològics i aplicacions contínues, etc.) Un functor és un morfisme de categories. Els conceptes de categoria i functor van aparèixer per primera vegada a l'article de Samuel Eilenberg i Saunders MacLane, *General Theory of Natural Equivalences*, Transactions Am. Math. Soc. **58** (1945) 231. El llibre de S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician* (1971, reed. 1989) és un vertader clàssic i una referència immillorable sobre aquest tema.

o sigui, si la antiimatge de tot obert de X_2 és un obert de X_1. Observar que f^{-1} denota *antiimatge* i no l'aplicació inversa (que pot no existir, donat que f no té per que ser exhaustiva!).

Exercicis.

(1) Veure, en el cas particular de $\mathbb{R}$ amb la topologia ordinària generada pels intervals oberts, quina relació hi ha entre la coneguda definició de continuïtat puntual (que comença: f contínua si $\forall\epsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ tal que ...) i la definició general donada aquí.
(2) Idem, comparant ara amb la definició de continuïtat uniforme a $\mathbb{R}$.
(3) Estendre aquestes comparacions al cas de $\mathbb{R}^n$ amb la topologia generada per les boles obertes.

Una aplicació

$$g : X_1 \longrightarrow X_2,$$

entre dos espais topològics es diu **oberta** si

$$g(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{T}_2,$$

és a dir, si la imatge de tot obert de X_1 és un obert de X_2.

Un **homeomorfisme** d'espais topològics, $(X_1, \mathcal{T}_1)$ i $(X_2, \mathcal{T}_2)$, és una aplicació contínua $f : X_1 \longrightarrow X_2$, bijectiva i oberta (*e.g.*, amb inversa contínua). S'escriu aleshores,

$$\boxed{X_1 \cong X_2,}$$

i els dos espais topológics són del tot equivalents en aquest cas (topològicament indistingibles).

Exercicis.

(1) Demostrar que tot segment obert (a, b) de la recta real, $a, b \in \mathbb{R}$ és homeomorf a la propia recta $\mathbb{R}$. Quànts homeomorfismes es poden construir?
(2) Demostrar que un cilindre obert indefinit és homeomorf a un cilindre obert finit, i a una corona circular oberta del pla $\mathbb{R}^2$.
(3) Demostrar que un segment real tancat per un extrem i obert per l'altre és homeomorf a la circumferència i construir-ne un homeomorfisme explícitament.
(4) Demostrar que una circumferència no és homeomorfa a la recta real.
(5) Demostrar que el conjunt de punts de dues circumferències en un mateix pla, una dins de l'altra, tangents en un punt, és

homeomorf a les mateixes circumferències però ara exteriors entre sí i tangents per fora (Fig. 1.2).

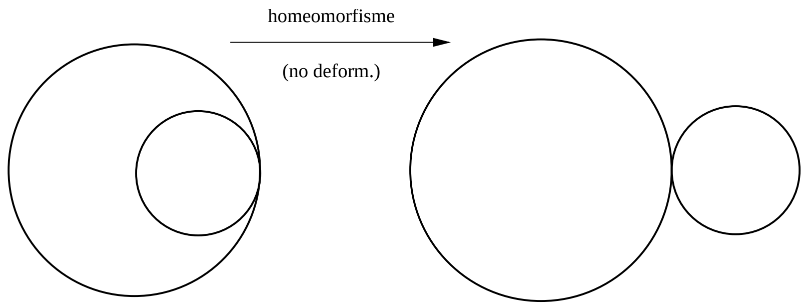


FIGURA 1.2. Malgrat que les dues parelles de circumferències són homeomorfes, no hi ha cap deformació possible que transformi un cas en l'altre, en el pla. L'exemple es pot estendre a dues esferes S^{n-1} tangents en dimensió n arbitrària.

Observi's, però, que en el pla no hi cap 'deformació' possible que transformi unes en les altres (per poder fer-ho necessitem la tercera dimensió).

(6) Idem en el cas de dues superfícies esfèriques S^{n-1} en dimensió n arbitrària.

(7) És l'esfera homeomorfa a un torus (pneumàtic)? Cercar informació sobre la classificació topològica de les superfícies a $\mathbb{R}^3$, que es fa tenint en compte, essencialment, el nombre de forats (sovint associats en Física a *singularitats*) i el gènere (*genus*) de la superfície (associat a, o més bé originari de les diverses *càrregues topològiques*: *solitons, monopols, instantons, merons*, etc.)

1.1.1.4. *Carta local.* En un espai topològic $(X, \mathcal{T})$, una carta local és una parella, (U, φ), constituïda per un obert $U \in \mathcal{T}$ i un homeomorfisme $\varphi : U \longrightarrow V$, amb V obert de $\mathbb{R}^n$.

Donada una coordenació a V (p.e., cartesiana), la φ ens transporta aquesta coordenació a U.

Nota. Cal pensar en una carta o mapa en cartografia, que és un homeomorfisme d'una part de la superficie terrestre o del mar (l'espai topològic X seria, per exemple, tota la superficie de la Terra, en aquest cas), en un troç del pla $\mathbb{R}^2$. Observi's que això es pot fer només localment, i no globalment (d'aquí li ve el nom de carta local).

1.1.1.5. *Varietat topològica.* Una varietat topològica, M, és un espai topològic Hausdorff tal que per a tot punt, $\forall p \in M$, existeix una carta local, (U_p, φ). Aleshores, $\forall q \in U_p$, tenim

$$\varphi(q) = (x_q^1, \dots, x_q^n) \in \mathbb{R}^n,$$

coordenades locals del punt q a la carta (U_p, φ).

Les funcions coordenades locals de q a la carta (U_p, φ) són les aplicacions φ^i,

$$\varphi^i : U_p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi^i = \pi^i \circ \varphi,$$

amb

$$\pi^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \pi^i(x^1, \dots, x^n) = x^i,$$

la projecció canònica i-èsima. És a dir que $\varphi^i(q) = x_q^i$, $\forall q \in U_p$, d'on $q \simeq (x_q^1, \dots, x_q^n)$, al sistema de coordenades locals. Evidentment, és igual donar (U_p, φ) o bé $(U_p; \varphi^1, \dots, \varphi^n)$, que molts cops s'escriu directament

$$\boxed{\left(U_p; x^1, \dots, x^n\right),}$$

l'entorn amb les funcions coordenades locals (Fig. 1.3).

1.1.2. Atles de classe C^k. En una varietat topològica M, és una col·lecció de cartes locals, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, tal que $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$, verificant-se la condició de compatibilitat entre cartes:
$\forall \alpha, \beta \in I$, la funció vectorial d'$n$ variables

$$\boxed{f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)^{\subset\mathbb{R}^n} \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)^{\subset\mathbb{R}^n}}$$

és de classe C^k (Fig. 1.4).

Alguns, d'un atles en diuen un subatles.

1.1.3. Equivalència d'atles. Atles maximal. Dos atles de classe C^k d'una varietat topològica M,

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}, \qquad \mathcal{A}' = \left\{({U'}_\beta, {\varphi'}_\beta)\right\}_{\beta\in I'}$$

es diuen equivalents sii la seva unió $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ és també un atles de classe C^k de M.

La classe d'equivalència d'un atles $\mathcal{A}$ rep el nom d'atles maximal, $\overline{\mathcal{A}}$. (Els que abans parlaven de subatles, ara d'aquest en diuen simplement atles.)

Exercicis.

(1) Demostrar que aquesta relació és efectivament d'equivalència.
(2) Veure que una classe d'equivalència d'aquesta relació d'equivalència és, efectivament, un element maximal del conjunt de tots els atles d'M ordenats per inclusió.

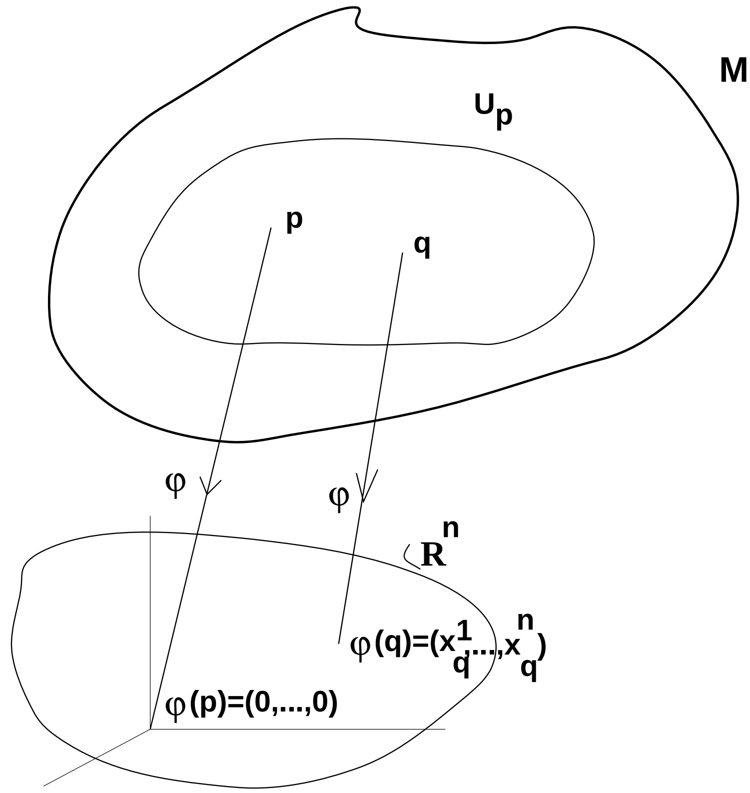


FIGURA 1.3. La carta (U_p, φ) i les funcions coordenades locals de q en aquesta carta. El fet que el punt p vagi a l'origen no és obligatori, però sí molt usual.

1.1.4. Varietats diferenciable, analítica i de Banach. Una varietat diferenciable C^k és una varietat topològica, M, amb un atles maximal de tipus C^k. [Varietat: *manifold, Mannigfaltigkeit.*]

Una varietat analítica, real o complexa, es defineix de la mateixa manera, demanant ara, però, que les funcions de transició siguin analítiques ($\exists$ sèrie de Taylor convergent, en un entorn de cada punt), reals o complexes. Així, en el cas complex, les $f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty$ han de ser holomorfes.

Una varietat de Banach també es defineix igual, només cal substituir $\mathbb{R}^n$ per un espai de Banach, $\mathcal{B}$, i parlar dels seus oberts V, corresponents a la seva topologia. Recordem que un espai de Banach és un espai vectorial mètric i complet, que un espai mètric és un conjunt amb una distància i que la completesa és una propietat esencial per a l'existència de límits (va mes enllà de la propietat de densitat en topologia). Cas particular d'aquests són els espais de Hilbert, $\mathcal{H}$, que són normats i

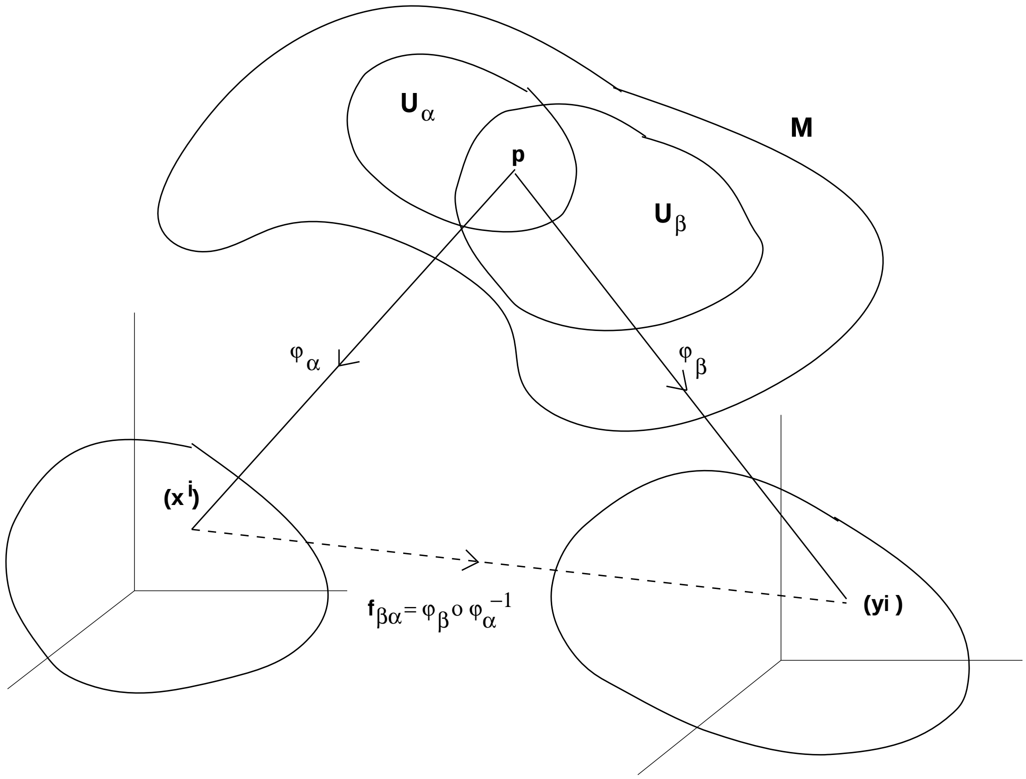


Figura 1.4. La funció de transició, $f_{\beta\alpha}$ entre cartes d'un atles, en una varietat M. Observar que aquesta és una funció vectorial ordinària d'n variables, $y^j = f^j_{\beta\alpha}(x^i)$. Es demana que sigui diferenciable amb continuïtat k vegades.

complets, éssent la norma la que defineix la distància (com a espai mètric) i aquesta la topologia (com a espai topològic).

Exercicis.

(1) Repassar les definicions precises d'aquests conceptes bàsics: distància, norma, completesa, espai de Banach, espais prehilbertià i de Hilbert.
(2) Buscar un exemple d'una distància que no provingui d'una norma.
(3) Portar fins al final les definicions de varietat en aquests casos, donant-se compte de la gran similitud que guarden aquestes situacions amb el cas d'$\mathbb{R}^n$.
(4) Digerir el següent raonament: malgrat que la definició d'atles maximal sembli complicada (tota una classe on hi ha infinits atles), per tal de treballar amb una varietat diferenciable

ho farem només amb *un* atles (representant de la classe d'equivalència) que sigui *el més senzill possible* (de molt poques cartes). Això minimitza el nombre de funcions de transició a considerar. Oi que ningú no té mai problemes amb el fet (situació semblant) que $2/3 = 8/12 = -14/-21 = \cdots$? Normalment treballem amb el representant més senzill, però tots ens sabem moure dins de la classe d'equivalència a l'hora de, per exemple, sumar fraccions.

1.1.5. Exemples de varietat diferenciable.

(1) Un obert $A \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat diferenciable C^∞. És trivial, doncs podem donar-ne un atles d'una sola carta.

(2) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, són varietats diferenciables no trivials, que es poden descriure amb un atles de tan sols dues cartes:

$$\mathcal{A} = \{(U_P, \varphi_P), (U_Q, \varphi_Q)\}\,,\ U_P = S^{n-1} \setminus \{Q\},\ U_Q = S^{n-1} \setminus \{P\},$$

amb $\varphi_P = \pi_Q$, $\varphi_Q = \pi_P$. Aquí P i Q són dos punts diametralment oposats de l'esfera (que prendrem com pol nord i pol sud, respectivament), φ_P és la projecció estereogràfica des de Q sobre el pla equatorial (i viceversa), i l'entorn de P obert, U_P, és tota l'esfera exceptuant el punt Q (Fig. 1.5).

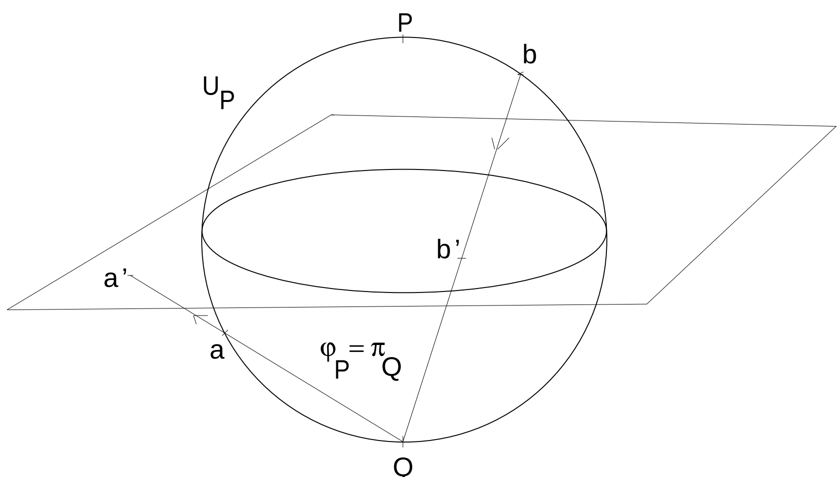


FIGURA 1.5. L'esfera S^{n-1} és una varietat diferenciable no trivial. Es pot descriure sempre amb tan sols dues cartes, per a tot n.

Exercici: Trobar l'expressió de la projecció estereogràfica en el cas general (n arbitrari) i demostrar que les funcions de transició són C^∞.

(3) Una superfície cilíndrica oberta, C^2 a $\mathbb{R}^3$ és una varietat diferenciable trivial.
Exercici: Què passa amb C^{n-1} a $\mathbb{R}^n$?

(4) El semicon,

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 0, \ x_1 \geq 0,$$

és una varietat que podem descriure amb una sola carta (amb $\varphi = \pi$ projecció ortogonal en la direcció de l'eix, Fig. 1.6). Es

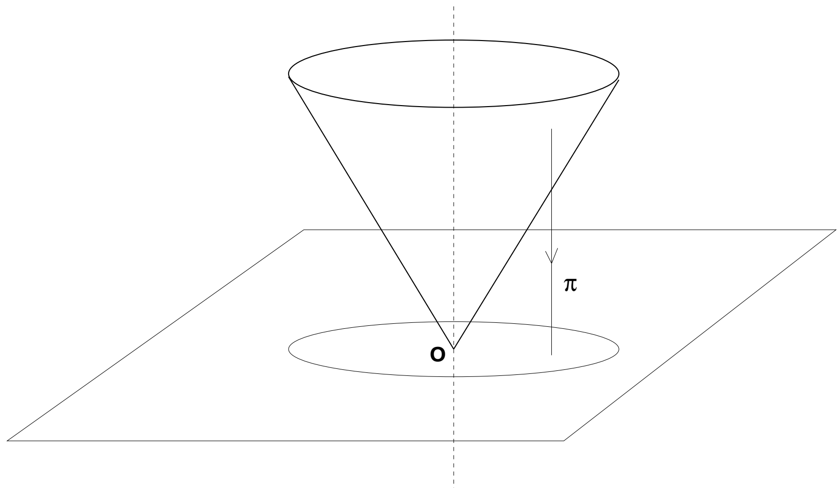


FIGURA 1.6. El semicon és una varietat diferenciable C^0 trivial.

tracta, però, d'una varietat C^0 només, doncs no hi ha diferenciabilitat en el vèrtex.
Aquesta és la famosa singularitat cònica [Cheeger et al., J. Diff. Geom. **18** (1983) 575; Ann. Math. **109** (1979) 259].
Exercici: Demostrar tot això (fer-ne una descripció emprant coordenades polars) i esbrinar què és la singularitat cònica.

(5) El con,

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 0,$$

no és una varietat diferenciable, doncs cap entorn de l'origen no és homeomorf a un obert d'$\mathbb{R}^n$. És un cas de varietat amb fulles.

(6) La bola n-dimensional tancada,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1,$$

no s'ajusta tampoc a la definició de varietat diferenciable. Es tracta d'una varietat amb vora (les descriurem a continuació).

Observacions.

(1) A vegades, de la definició de varietat diferenciable s'elimina l'hipòtesi de Hausdorff (la qual roman aleshores com una propietat adicional de l'espai topològic M).
(2) A vegades la definició d'atles en una varietat es restringeix, ja d'entrada, a que tingui com a molt un nombre infinit numerable de cartes locals. (En realitat, tots els exemples que veurem aquí correspondran sempre a aquest cas.)

1.1.6. Varietat diferenciable C^k amb vora. Una varietat diferenciable C^k amb vora [*borde, bordo, boundary, Rand,...*] té la mateixa definició d'abans, però ara:

$$\ldots \quad \forall p \in M, \ \exists\, U_p, \ \exists\, \varphi : U_p \longrightarrow V^{\subset \mathbb{R}^n},$$

amb φ homeomorfisme i tal que

$$\begin{cases} V \text{ obert}, \\ \textit{o bé} \\ V = W^{\subset \mathbb{R}^n, \text{obert}} \cap ([0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \neq W. \end{cases}$$

A la Fig. 1.7 hi veiem un esquema d'un conjunt V del segon tipus.

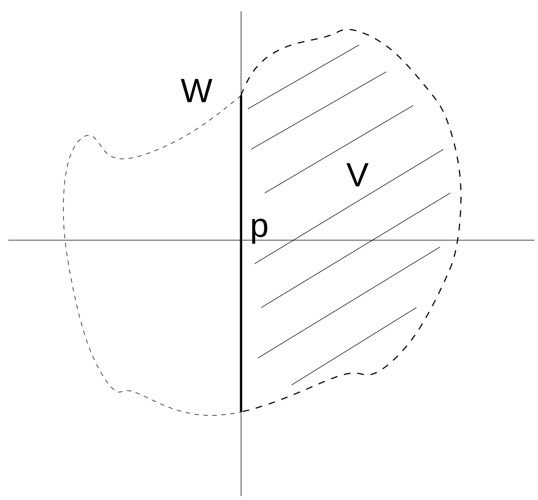


FIGURA 1.7. Conjunt V del segon tipus (obert amb una cara tancada).

La vora de M, ∂M, està formada pels punts per als quals resulta impossible trobar un entorn homeomorf a un obert d'$\mathbb{R}^n$, és a dir,

$$\partial M = M \setminus \{ p \in M \mid \ \exists\, U_p \cong V \text{ obert d'}\mathbb{R}^n \}.$$

Observi's que ∂M *no* sempre coincideix amb la frontera topològica (fr M). En general, $\partial M \subset$ fr M, éssent $\partial M = (\text{fr } M) \cap M$.

Exemples.

(1) Sigui $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| \leq 1\}$. Aquí $\partial M = S^{n-1}$, mentre que la frontera topològica és: fr $M = S^{n-1} \cup \{0\}$.

(2) Observar els dos subconjunts de $\mathbb{R}^2$ de la Fig. 1.8. Ambdós

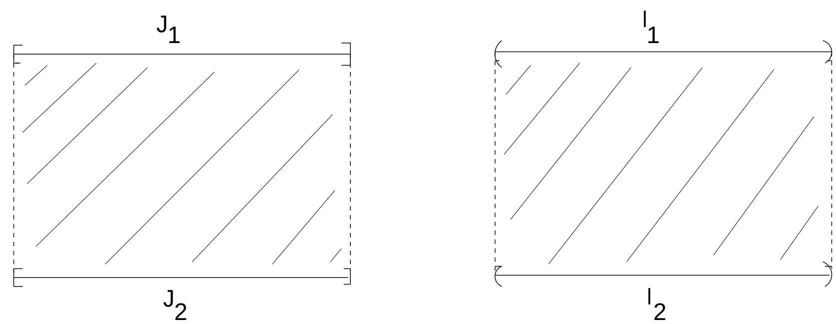


FIGURA 1.8. La de l'esquerra no és una varietat diferenciable, mentre que la de la dreta sí.

són oberts per dos costats, i tancats pels altres dos, amb la diferència que els segments de tancament són, per la seva banda, tancats i oberts, respectivament. Observeu que la de l'esquerra no és una varietat diferenciable, mentre que la de la dreta sí, diem-li M. Es tracta d'una varietat diferenciable amb vora: $\partial M = I_1 \cup I_2$. Observeu que tenim aquí, efectivament, $\partial M \subset$ fr M i que $\partial M = (\text{fr } M) \cap M$.

1.1.7. Varietat diferenciable orientable. És una varietat diferenciable, M, que té un atles, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, tal que totes les funcions de transició, $f_{\beta\alpha}$, satisfan:

$$\det f'_{\beta\alpha}(x) > 0, \quad \forall \alpha, \beta \in I, \; \forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Exercicis.

(1) Veure que un cilindre és una varietat diferenciable orientable, mentre que la banda de Möbius no ho és (Fig. 1.9).

(2) Veure si l'esfera és una varietat diferenciable orientable.

(3) Veure si la botella de Klein és una varietat diferenciable orientable.

1.1.8. Subvarietat diferenciable. En donarem ara una primera definició i, una mica més endavant, altres versions més generals d'aquest concepte de subestructura en una varietat.

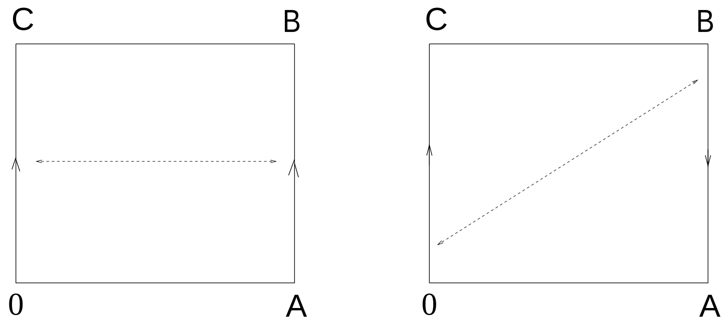


FIGURA 1.9. Construccions del cilindre (esquerra) i de la banda de Möbius (dreta) a partir d'un recinte fonamental.

1.1.8.1. *Definició 1 (per anul.lació de funcions).* Siguin M i M', amb $M' \subset M$, varietats diferenciables de dimensions n i m, respectivament, amb $m < n$. Suposem que $\forall\, p \in M', \exists\, (U_p, \varphi_p)$, carta local a M, tal que $({U'}_p, {\varphi'}_p)$, amb

$$ {U'}_p = \left\{ q \in U_p \,|\, \varphi_p^{m+1}(q) = \cdots = \varphi_p^n(q) = 0 \right\}, \qquad {\varphi'}_p = \varphi_p|_{{U'}_p}, $$

restricció de φ_p a ${U'}_p$, és una carta local de p a M'. Es diu aleshores que M' és una subvarietat diferenciable de M.

Si demanem, a més, que M' sigui un subespai topològic de M amb la topologia relativa[2] —recordem que els oberts de M' seran precisament els de M intersecats amb M'— aleshores es parla d'una subvarietat diferenciable regular.

Exemples. Ja n'hem vist anteriorment: la superfície esfèrica $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, la qual s'obté imposant la condició

$$ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - r^2 = 0, $$

el torus $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, que s'obté imposant

$$ \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 - b^2 = 0, $$

l'el.lipsoid, el cilindre, etc.

1.1.8.2. *Teorema de Whitney.* Tota varietat diferenciable de dimensió finita, m, sobre $\mathbb{R}$ es pot submergir (e.g., com a subvarietat diferenciable regular) a $\mathbb{R}^n$, per a un cert valor de n prou gran, que el teorema diu que és: $n \leq 2m + 1$.

[2]Es tracta de la manera més natural de definir una topologia en un subconjunt d'un espai topològic.

1.1.9. Funció diferenciable. Sigui M una varietat diferenciable C^k. Una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu que és diferenciable C^r $(r \leq k)$ a $p \in M$ sii donada una carta arbitraria (U_p, φ_p), la funció real de vàries variables $f \circ \varphi_p^{-1}$ és diferenciable C^r a $\varphi_p(p)$ (Fig. 1.10).

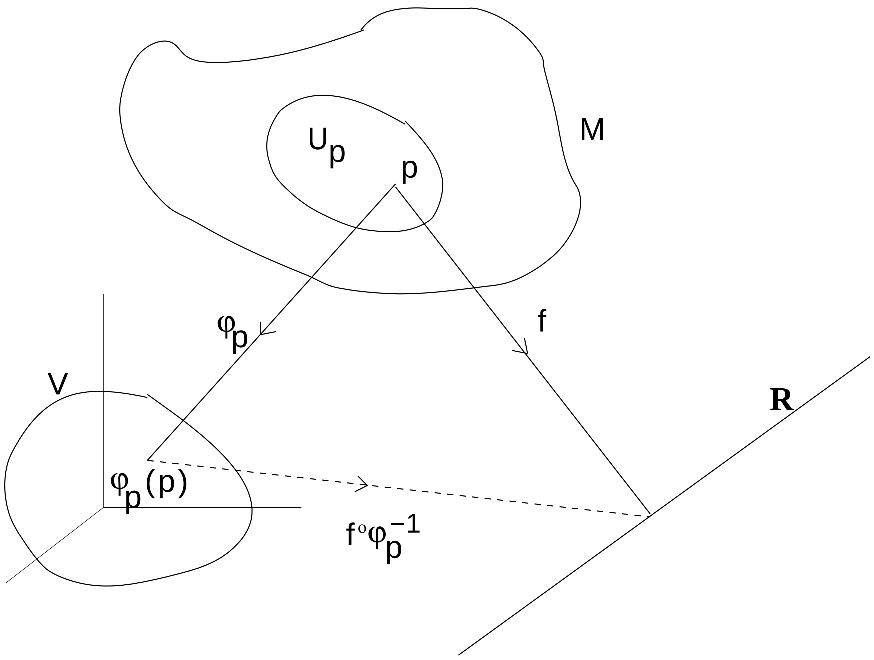


FIGURA 1.10. Funció diferenciable, f, en un punt, p, de la varietat, M.

Exercicis.

(1) Demostrar que les funcions coordenades són diferenciables C^k a tots els punts de la varietat.
(2) Demostrar que el conjunt de totes les funcions diferenciables C^r $(r \leq k)$ en un punt p_o de la varietat M constitueixen una àlgebra, que anomenarem $C^r(p_o)$.
(3) Estendre aquest concepte a funcions diferenciables a tota la varietat M i definir l'àlgebra $C^r(M)$.

1.1.9.1. *Germens de funcions diferenciables.* Definim la següent relació d'equivalència: dues funcions diferenciables a $p_o \in M$ són equivalents sii existeix un entorn de p_o en el qual coincideixen, és a dir,

$$\boxed{\forall\, f, g \in C^r(p_o), \quad f \underset{p_o}{\sim} g \iff \exists\, U_{p_o} \quad \text{tal que} \quad f\,\big|_{U_{p_o}} = g\big|_{U_{p_o}}\,.}$$

És fàcil demostrar que es tracta d'una relació d'equivalència. La clase d'equivalència de f s'anomena germen de f a p_o: $[f]_{p_o}$ (o bé $\bar{f}_{p_o}$).

El conjunt quocient és l'àlgebra de germens

$$\square_{p_o} = C^r(p_o)/\sim_{p_o}.$$

1.1.10. Aplicació diferenciable entre varietats. Siguin M_n una varietat diferenciable C^k de dimensió n i M_m una varietat diferenciable C^h de dimensió m. Una aplicació $f : M_n \longrightarrow M_m$ es diu que és diferenciable C^r $(r \leq k, h)$ a $p \in M$ sii donades cartes arbitraries (U_p, φ_p) i $(V_{f(p)}, \psi_{f(p)})$, la funció vectorial de vàries variables $\psi_{f(p)} \circ f \circ \varphi_p^{-1}$ és diferenciable C^r a $\varphi_p(p)$ (Fig. 1.11).

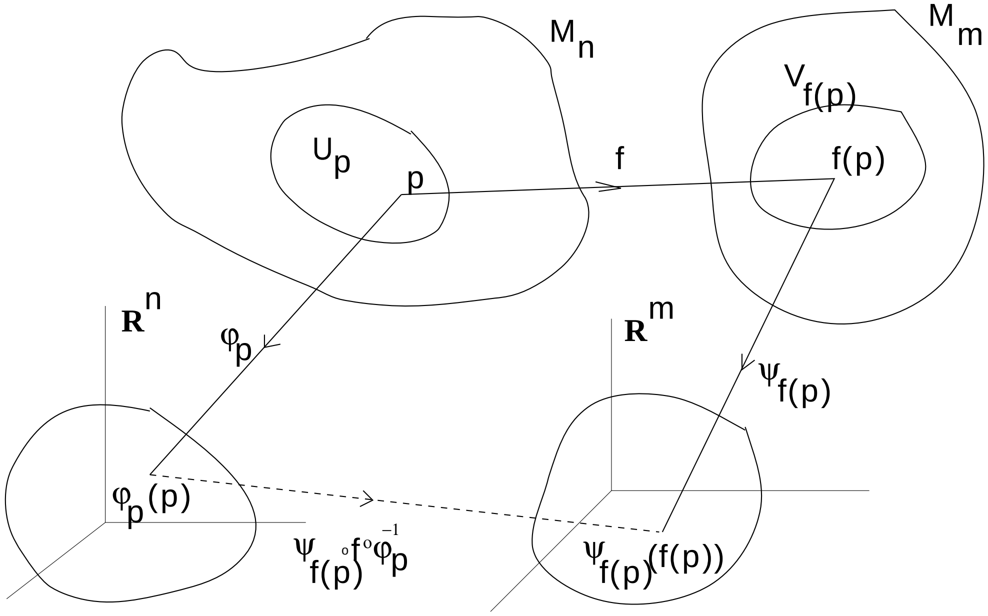


FIGURA 1.11. Aplicació diferenciable, f, entre les varietats M_n i M_m, en un punt, p, de la varietat, M_n.

1.1.11. Difeomorfisme entre varietats. Donades dues varietats de la mateixa dimensió, un difeomorfisme de tipus C^r és una aplicació diferenciable C^r entre les varietats, bijectiva i amb inversa també diferenciable C^r.

El difeomorfisme és, per així dir-ho, un "isomorfisme entre varietats". Dues varietats entre les que hi ha un difeomorfisme C^r són a tots els efectes indistingibles, pel que fa referència a la seva estructura de diferenciabilitat fins a ordre C^r.

1.1.12. Una altra definició de subvarietat.

1.1.12.1. *Subvarietat immersa de dimensió $m \leq n$.* D'una varietat diferenciable M_n (el subindex en denota la dimensió), és una altra varietat diferenciable, M_m, amb $m \leq n$, tal que $M_m \subset M_n$ i existeix una aplicació diferenciable,

$$i : M_m \longrightarrow M_n,$$

que té rang m:

$$\operatorname{rang} i|_p = m, \quad \forall\, p \in M_m.$$

Nota. El rang d'una aplicació diferenciable entre varietats, en un punt, és el que li correspon a l'aplicació diferenciable ordinària induïda en les cartes locals respectives (Fig. 1.11), que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, el qual, com sabem, és el rang de la matriu jacobiana, en el punt considerat.

1.1.12.2. *Definició 2 (embedding [amer. imbedding]).* Correspon al concepte de subvarietat en sí: és una subvarietat immersa que verifica a més que $i : M_m \longrightarrow i(M_m)$ és un difeomorfisme (del mateix ordre de diferenciabilitat que la propia varietat), o sigui $M_m \cong i(M_m)$.

Una subvarietat es diu tancada si, a més, M_m és un subconjunt tancat de M_n.

Exemples.

(1) $(0,1) \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, és una subvarietat, amb $i = I|_{(0,1)}$.

(2) Observem que, a més, tenim que $(0,1)$ és difeomorf C^∞ a *tot* $\mathbb{R}$. Un (dels molts) difeomorfismes possibles és

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{x - 1/2}{\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

O sigui que $(0,1)$ és a la vegada una subvarietat de $\mathbb{R}$ i, al mateix temps, és també difeomorfa a $\mathbb{R}$. És com si una part fos a l'hora el tot! Aquesta situació és molt comuna en la teoria de varietats (i encara ho és més en topologia), i no es limita doncs a aquest exemple.

Proposició. Siguin M_n i N dues varietats diferenciables. Si

$$f : M_n \longrightarrow N$$

té rang k a tot un entorn de $f^{-1}(q)$ (on $q \in N$), aleshores, $f^{-1}(q)$ és o bé una varietat diferenciable tancada de M_n, de dimensió $n - k$, o bé el conjunt $\emptyset$.

Exercicis.

(1) Demostrar aquesta proposició.

(2) Veure, en conseqüència, quína és la relació que hi ha entre la definició de subvarietat que hem vist aquí i la primera, que ha estat introduïda abans.
(3) Estudieu en aquest context el següent exemple: donada una varietat M_n, considerem un subconjunt $C \subset M_n$ i la funció característica de C,

$$\chi_C : M_n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \chi_C(p) = \begin{cases} 0, & p \notin C, \\ 1, & p \in C. \end{cases}$$

Veure quin és el rang de χ_C, raonant-ho pels casos en que C sigui tancat o sigui obert, respectivament.

1.1.13. Grup topològic. Grup de Lie. Un grup topològic és un *grup algebraic* que és alhora un *espai topològic* i de manera que les dues estructures són *compatibles*, és a dir que l'operació del grup,

$$* : G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \mapsto x * y,$$

és una aplicació contínua entre els espais topològics producte $G \times G$ i G, i el pas a l'invers,

$$G \longrightarrow G, \quad x \mapsto x^{-1},$$

és també contínua, de G a G.

Un grup de Lie és un *grup algebraic* que és al mateix temps una *varietat diferenciable* C^k i de manera que les dues estructures són *compatibles*, és a dir que l'operació del grup,

$$* : G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \mapsto x * y,$$

és una aplicació diferenciable C^k entre varietats i el pas a l'invers,

$$G \longrightarrow G, \quad x \mapsto x^{-1},$$

també. Això es pot resumir demanant només que la operació composada,

$$\boxed{(x, y) \mapsto x * y^{-1},}$$

sigui diferenciable C^k.

Un grup de Lie local és qualsevol entorn de l'element neutre d'un grup de lie G.

Un grup de Lie uniparamètric és aquell que, com a varietat diferenciable és de dimensió 1.

1.1.13.1. *Exemples.*

(1) El grup $SO(2)$ de rotacions del pla (donades per matrius ortogonals de determinant 1):

$$\boxed{R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.}$$

Es tracta d'un grup de Lie uniparamètric, de paràmetre φ en aquest cas, compacte ($\varphi \in [0, 2\pi]$).

(2) El grup de rotacions de l'espai ordinari, $SO(3)$, de dos paràmetres (e.g., els angles d'Euler).

(3) De manera semblant es defineix el cas n-dimensional, $SO(n)$. Encara que sigui difícil imaginar-se rotacions en un espai d'n dimensions, no ho és el considerar la seva expresió algebraica, com a matrius formades per columnes de vectors ortogonals entre sí i de norma 1, i tals que el seu determinant val 1: matrius ortogonals (u operadors) de determinant 1[3]

$$\boxed{O \in SO(n) \quad \Longleftrightarrow \; O^T O = I \;\wedge\; \det O = +1.}$$

(4) En el cas complex el concepte de matriu ortogonal queda substituït pel de matriu unitària, i el grup de Lie corresponent és $SU(n)$:

$$\boxed{U \in SU(n) \quad \Longleftrightarrow \; U^\dagger U = I \;\wedge\; \det U = +1,}$$

on $U^\dagger = U^{T*}$ és la matriu (u operador) hermítica conjugada.

(5) Si no s'imposa la condició de que el determinant valgui 1, aleshores tenim, respectivament, els grups $O(n)$, de matrius ortogonals (cas real), i $U(n)$, de matrius unitàries (cas complex).

Observació. Van ser les teories de Cartan i d'Ehresman les que van fer palès l'important paper dels grups de Lie dins de la geometria diferencial moderna, d'una manera molt semblant al programa de Felix Klein de geometria clàssica respecte als grups algebraics (la famosa *algebraització de la geometria*, que tants resultats magnífics havia donat). Aquí es tracta doncs de l'algebraització de la geometria diferencial. L'aplicació d'aquests programes, sobre tot dins de la física-matemàtica actual, ha tingut (i està tenint) un impacte realment extraordinari.

Exercicis.

(1) Demostrar que el producte cartesià de dues varietats diferenciables, $M_n \times M_m$, és també una varietat diferenciable.

[3] Recordem que $\wedge$ és el símbol lògic corresponent a la connectiva 'i'.

(2) Demostrar l'afirmació que n'hi ha prou amb demanar la diferenciabilitat de $(x, y) \mapsto x * y^{-1}$, en la definició de grup de Lie.
(3) Demostrar que tot grup de Lie local és difeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$ que conté l'origen.

1.2. Camps tangents

1.2.1. Vector tangent a una varietat diferenciable en un punt.

1.2.1.1. *Definició 1 (axiomàtica).* Un vector tangent, v_p, a una varietat M en un punt $p \in M$ és una aplicació lineal de l'àlgebra dels germens de funcions diferenciables en un cert entorn U_p, que satisfà a més la regla de Leibniz, o sigui,

$$\begin{aligned}&v_p : \square_p \longrightarrow \mathbb{R}\\&v_p(\alpha f + \beta g) = \alpha v_p f + \beta v_p g,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^1(M),\\&v_p(fg) = g(p)(v_p f) + f(p)(v_p g).\end{aligned}$$

1.2.1.2. *Espai tangent.* El conjunt de vectors tangents en un punt p, amb la suma i el producte escalar definits de la manera natural (operant les imatges), constitueix un espai vectorial, anomenat espai tangent a $p \in M$, T_pM.

1.2.1.3. *Corba diferenciable.* En una varietat, M, és tota aplicació diferenciable, c, d'un interval real, I, a la varietat

$$\begin{array}{rcl} c : I^{\subset \mathbb{R}} & \longrightarrow & M \\ t & \mapsto & c(t). \end{array}$$

Generalment, quan es fixa un punt, p_0, de la varietat pel qual hi passa la corba, es posa $c(0) = p_0 \in M$ (Fig. 1.12).

1.2.1.4. *Definició 2 (derivació segons una corba).* Donada una funció, f, diferenciable en un punt $p_0 \in M$, hom defineix

$$v_{p_0} : \square_{p_0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{v_p(\bar{f}) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0},}$$

éssent f qualsevol representant del germen $\bar{f}$. Queda clar que aquí el vector tangent, v_{p_0}, no és més que la derivada direccional segons c a p_0. És fàcil de veure que satisfà tots els axiomes de la definició 1 (*exercici*).

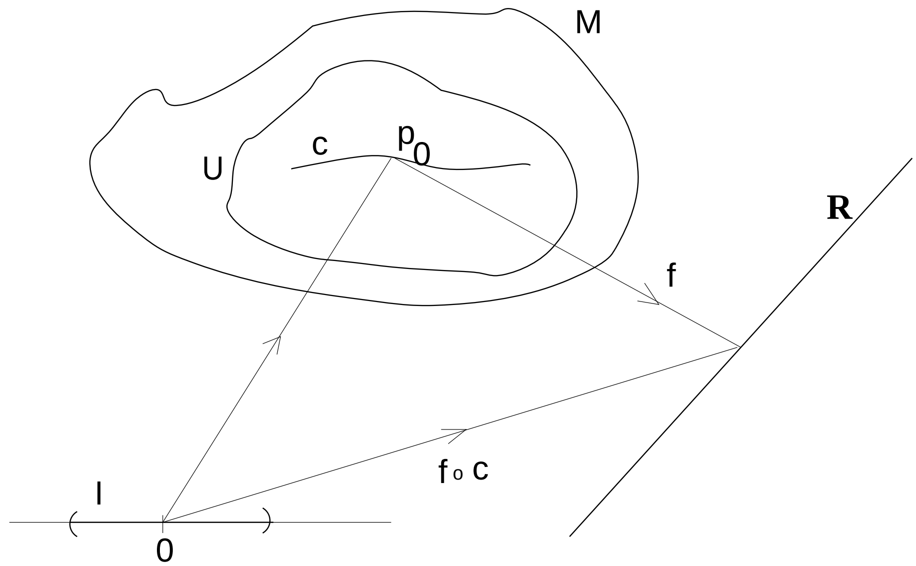


FIGURA 1.12. Corba diferenciable, c, sobre la varietat, M.

1.2.1.5. *Definició 3 (classe d'equivalència de corbes).* Definim primer la relació d'equivalència entre corbes diferenciables en un punt, p_0, de M com

$$c_1 \underset{p_0}{\sim} c_2 \iff \forall\, \bar{f} \in \square_{p_0},\ \left.\frac{d}{dt}(f \circ c_1)(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(f \circ c_2)(t)\right|_{t=0},$$

éssent f qualsevol representant del germen $\bar{f}$.

Exercici. Veure que aquesta definició no depèn del representant f de $\bar{f}$ elegit, i que es tracta, en efecte, d'una relació d'equivalència.

Diem ara: un vector tangent, v_p, a una varietat M en un punt $p_0 \in M$ és una classe d'equivalència de corbes, $\bar{c}$ (Fig. 1.13).

Proposició. Les tres definicions de vector tangent són equivalents. En particular, donat un vector tangent, v_p, que satisfà la definició axiomàtica,

$$v_p : \square_p \longrightarrow \mathbb{R},$$

si el fem actuar sobre les funcions coordenades, φ^i, en un entorn de p, U_p, ens donarà uns certs valors

$$v_p(\varphi^i) = \alpha^i, \qquad v_p = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ara bé, el teorema d'existència i unicitat de solució d'un sistema d'equacions diferencials de primer ordre, en aquest cas

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_p^c = v_p, \qquad \left.\frac{dc^i(t)}{dt}\right|_{t=0} = \alpha^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

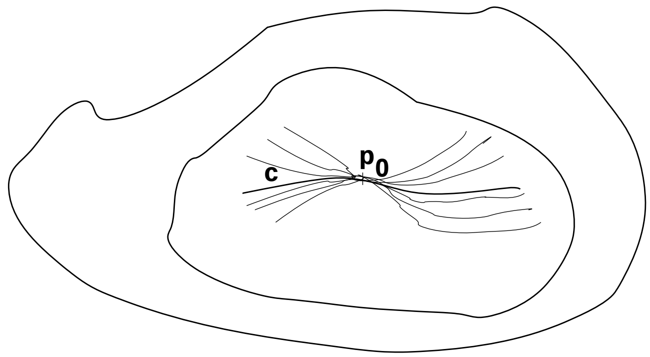


FIGURA 1.13. El vector tangent, a la corba c a p_0, com un feix de corbes.

ens diu que hi ha una i una sola corba diferenciable, c, que satisfà això. Resulta, doncs, que tot vector tangent de la definició axiomàtica és, de fet, una derivada direccional segons una certa corba, c.v.d.

Notes.

(1) Aquest raonament ens mostra d'una manera molt clara com la teoria d'equacions diferencials a $\mathbb{R}^n$ (o a $\mathbb{C}^n$, segons els casos) s'imbrique totalment dins de la geometria diferencial. Com que la diferenciabilitat és un concepte local i, localment (*i.e.,* en un entorn U_p), la varietat M_n no és més qu'un obert de $\mathbb{R}^n$, doncs aquí no hi ha res de nou! "Aquí" vol dir pel que fa referència a vectors i espai tangent, espai dual, tensors, àlgebra exterior, de Clifford, etc.: tots els conceptes *locals* de la varietat.

(2) Tot això, començant per les definicions anteriors, és vàlid a més, de manera immediata, per a varietats diferenciables de Banach.

1.2.1.6. *Bases de l'espai tangent.* Donada una carta local, (U_p, φ),[4] i les coordenades corresponents, $\varphi^i(p) = x^i$, $\varphi(p) = x_0$, l'espai tangent, T_pM, té una base donada pels vectors de derivació parcial segons aquestes funcions coordenades (que són corbes diferenciables sobre la varietat, Fig. 1.14)

$$\boxed{T_pM = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{x_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{x_0} \right\rangle.}$$

En efecte:

[4]No acostumarem, a partir d'ara, a posar el subíndex p a φ, ni tampoc el subíndex 0 a p, per tal d'alleugerir la notació.

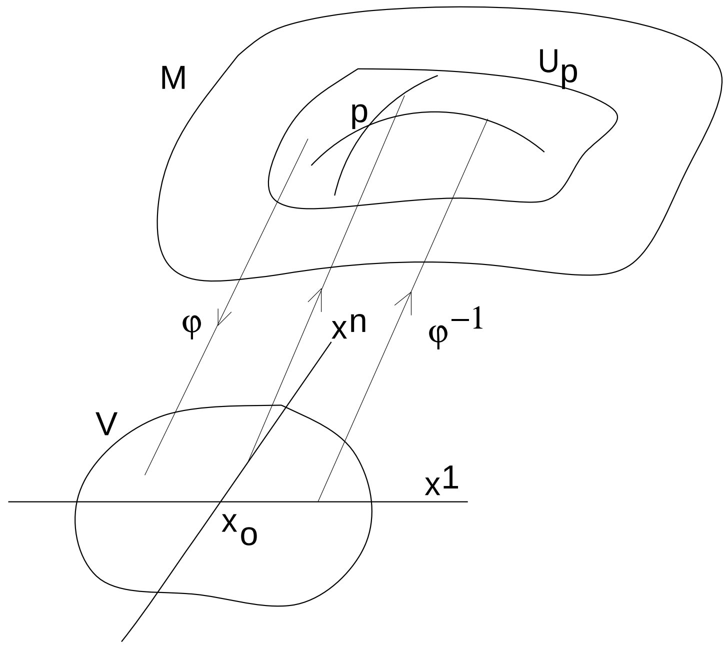


FIGURA 1.14. Les pròpies funcions coordenades ens donen localment un sistema de corbes diferenciables sobre la varietat i llurs corresponents vectors tangents formen una base de T_pM.

(1) Hom té que $v_p = \sum_i v_p(\varphi^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}$.
(2) Si $\sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} = 0$, actuant sobre les funcions coordenades, x^j, hom té que $\sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right)_{x_0} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, d'on $\lambda_j = 0$, $\forall\, j = 1, \ldots, n$.

1.2.1.7. *Canvis de coordenades.* Donades dues cartes locals en torn a un mateix punt, $p \in M$,

$$(U_p, \varphi), \quad ({U'}_p, \varphi'), \quad \varphi^i(p) = x^i, \quad {\varphi'}^i(p) = y^i, \quad \varphi(x_0) = p = \varphi'(y_0),$$

tenim

$$\sum_j \lambda^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0} = v_p = \sum_i \mu^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{y_0}, \qquad \mu^i = \sum_j \lambda^j \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{x_0},$$

d'on veiem immediatament que la matriu de canvi de base és la matriu jacobiana del canvi de coordenades, en el punt considerat:

$$\boxed{{C^i}_j = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{x_0}.}$$

(A partir d'ara no posarem sumatoris, adoptant el conveni d'Einstein de sumació sobre tota parella d'índexs repetits.)

1.2.1.8. *Espai tangent dual.* En un punt p de la varietat M, és l'espai dual de l'espai tangent T_pM, i es denota per T_p^*M.

Donada una funció diferenciable a p, f (més ben dit, el seu germen $\bar{f} \in \Box_p$), defineix de manera natural un element de T_p^*M:[5]

$$\begin{array}{rcl} (df)_p : T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (df)_p v_p & = & v_p f. \end{array}$$

Anant a parar altre cop a les funcions coordenades locals, és molt fàcil veure que la base dual de la base de l'espai tangent obtinguda abans ve donada per les diferencials de les funcions coordenades:

$$\boxed{T_p^*M = \left\langle (dx^1)_{x_0}, \ldots, (dx^n)_{x_0} \right\rangle.}$$

El canvi de coordenades a l'espai tangent dual s'obté com abans:

$$\lambda_j (dx^j)_{x_0} = \mu_i (dx^i)_{y_0}, \qquad \mu_i = \lambda_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right)_{y_0}.$$

En forma matricial:

$$\boxed{D = (C^{-1})^T,}$$

com és ben conegut.[6]

1.2.1.9. *Àlgebres tensorial i exterior.* La notació, d'acord amb el que hem dit, podria ser:

$$E = T_pM, \quad E^* = T_p^*M, \quad \mathcal{T}(E), \quad \Lambda_c(E), \quad \Lambda^c(E), \quad \mathcal{S}(E), \quad \mathcal{C}(E), \ \ldots$$

on les darreres són l'àlgebra simètrica, l'àlgebra de Clifford, etc. N'hi haurà prou amb posar un parell d'expressions explícites.

Per a un tensor covariant d'ordre r i contravariant d'ordre s, tenim

$$\boxed{(T_r^s)_p = \lambda_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right)_{x_0} \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \right)_{x_0} \otimes (dx^{i_1})_{x_0} \otimes \cdots \otimes (dx^{i_r})_{x_0};}$$

---

[5] Noti's que, encara que es tracta de l'actuació de la mateixa funció f, com a ens matemàtic *no* és la mateixa cosa, doncs f és una aplicació de M a $\mathbb{R}$, mentre que aquí va de T_pM a $\mathbb{R}$.

[6] L'espai tangent a una varietat diferenciable en un punt no és sino un exemple d'espai vectorial i, per això, totes les consideracions que farem sobre les àlgebres tensorial i exterior són exactament les mateixes que corresponen a un espai vectorial abstracte, éssent l'única característica específica d'aquest cas el fet que la matriu de canvi de base sigui la jacobiana del canvi de coordenades.

per a una $r-$forma

$$\boxed{(\omega_r)_p = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \lambda_{i_1\ldots i_r}\ (dx^{i_1})_{x_0}\wedge\cdots\wedge(dx^{i_r})_{x_0};}$$

i les equacions de canvi de base (de coordenades locals) són, per a un tensor (r,s),

$$\boxed{\mu^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} = \lambda^{h_1\ldots h_s}_{k_1\ldots k_r}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{h_1}}\right)_{x_0}\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{h_s}}\right)_{x_0}\left(\frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{i_1}}\right)_{y_0}\cdots\left(\frac{\partial x^{k_r}}{\partial y^{i_r}}\right)_{y_0}.}$$

No cal fer cap més consideració especial, tret d'aconsellar al lector un repàs de tots aquests conceptes en qualsevol llibre d'àlgebra tensorial.

1.2.1.10. *Camps tangents.* Un camp tangent és donar a cada punt de la varietat un element d'un dels espais considerats més amunt. Parlarem, doncs: (i) de camp vectorial tangent,

$$\begin{aligned} v : M &\longrightarrow \{TM\} \\ p &\mapsto v_p, \end{aligned}$$

on per $\{TM\}$ volem designar el conjunt de tots els vectors tangents en qualsevol punt de M, (ii) d'un camp de tensors (r,s),

$$\begin{aligned} T^s_r : M &\longrightarrow \{T^s_r M\} \\ p &\mapsto (T^s_r)_p, \end{aligned}$$

on $\{T^s_r M\}$ són tots els tensors de tipus (r,s), en qualsevol punt de M, (iii) d'un camp de $r-$formes, etc. Per cert, (iv) un camp escalar (és a dir, un camp de números: a cada punt de M un nombre real) no és res més que una *funció diferenciable*, f, sobre la varietat.[7]

1.2.1.11. *Germens de camps.* Donats camps d'un cert tipus fixat, podem definir la següent relació d'equivalència en un punt $p\in M$:

$$\boxed{T^s_r \underset{p}{\sim} {T'}^s_r \iff \exists\, U_p \quad \text{tal que} \quad T^s_r\big|_{U_p} = {T'}^s_r\big|_{U_p}.}$$

Una classe d'equivalència d'aquesta relació es diu germen de camp (r,s), i es denota per $[T^s_r]$ (o bé $\bar{T}^s_r$).[8]

[7]Veurem que el concepte d'espai fibrat permet donar una definició molt més natural i bonica del concepte de camp. I com que els camps són fonamentals dins de la Física, això ens indica que els fibrats hauran de ser estudiats amb cert detall.

[8]La introducció del concepte de germen no es fa pas per tal d'embolicar la troca. La diferenciabilitat és un concepte *local* i per tant els germens (les classes) hi són de totes totes, encara que vulguem ignorar-los. És, altre cop, com en el cas de les fraccions: 2/4 serà sempre el mateix que 1/2, ningú no pot mai ignorar aquest fet (i això no és cap perogrullada!).

Exemples.

(1) El camp mètric euclidià o de Riemann (a $\mathbb{R}^n$)

$$\boxed{T_2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2.}$$

(2) El camp mètric de Minkowski (a $\mathbb{R}^4$)

$$\boxed{T_2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.}$$

1.2.1.12. *Diferencial d'una aplicació diferenciable entre varietats.* Donades M_1 i M_2, varietats diferenciables, i $f : M_1 \longrightarrow M_2$, una aplicació diferenciable a $p \in M_1$, la diferencial de f a p, que es representa per f' (o bé f_*), és la següent aplicació lineal entre els espais tangents:

$$f'_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2, \qquad v_p \mapsto w_{f(p)},$$
$$w_{f(p)}(\bar{h}) = v_p(h \circ f), \qquad w^j = \left(\frac{\partial(\psi \circ f^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{x_0} v^i.$$

La matriu de l'aplicació lineal f'_p és la matriu jacobiana de f en les coordenades locals (Fig. 1.15).

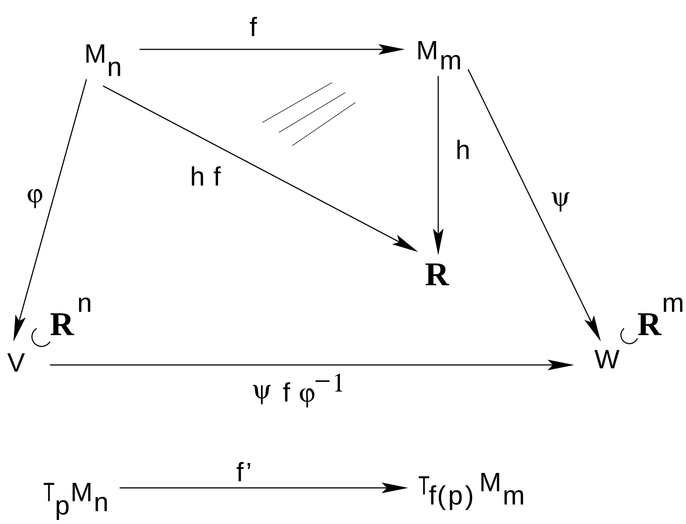


FIGURA 1.15. En coordenades locals, f no és més que una funció vectorial de vàries variables i la seva diferencial, f', és la linealització de f i té per matriu la matriu jacobiana.

1.2.1.13. *Pull back o imatge recíproca de formes.* Donades, com abans, M_1 i M_2, i $f : M_1 \longrightarrow M_2$ diferenciable a $p \in M_1$, partint de f' podem definir ara, de manera natural, la següent aplicació dels camps de formes:

$$\begin{aligned} &{f^*}_p : \Lambda^k_{f(p)} M_2 \longrightarrow \Lambda^k_p M_1, \\ &f^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f'(v_1), \ldots, f'(v_k)). \end{aligned}$$

f^* rep el nom de *pull back* de formes i les imatges per f^* es diuen també imatges recíproques de formes.

1.2.1.14. *Extensió d'un difeomorfisme de varietats a tota la capa tensorial.* Es du a terme exactament de la mateixa manera com es fa a àlgebra multilineal: obtingudes ja

$${f'}_p : T_p M_1 \longrightarrow T_{f(p)} M_2$$

lineal i inversible als espais vectorials tangents (evidentment, M_1 i M_2 tenen la mateixa dimensió, n) i

$${f^*}_p : \Lambda^k_{f(p)} M_2 \longrightarrow \Lambda^k_p M_1$$

multilineal en els de formes, construïm ara de manera natural la següent aplicació multilineal[9]

$$\widehat{f}_p : {T_r^s}_p M_1 \longrightarrow {T_r^s}_{f(p)} M_2, \qquad \widehat{f}_p(T_r^s)(v_1, \ldots, v_r; \eta_1, \ldots, \eta_s) = \\ = T_r^s({f'}^{-1}(v_1), \ldots, {f'}^{-1}(v_r); f^*(\eta_1), \ldots, f^*(\eta_s)).$$

En components a les cartes locals de p i $f(p)$, tot això equival, simplement, a contraure les components del tensor de partida amb r còpies de la matriu jacobiana inversa de f i amb s còpies de la transposada de la matriu jacobiana de f, i l'empalme ve immediatament donat per la regla de la cadena:

$$\boxed{b^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(y_0) = a^{h_1 \ldots h_s}_{k_1 \ldots k_r}(x_0) \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{h_1}} \right)_{x_0} \cdots \left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{h_s}} \right)_{x_0} \left(\frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \right)_{y_0} \cdots \left(\frac{\partial x^{k_r}}{\partial y^{i_r}} \right)_{y_0},}$$

on $a(x)$ són les components de T_r^s al punt p (que en coordenades locals és x_0), $b(y)$ són les components de $\widehat{f}_p(T_r^s)$ a $f(p)$ (y_0, en coordenades locals), i la transposició i l'inversió de la jacobiana de f són clares a la fòrmula, de manera explícita (cal tenir ben present l'ordre que guarden els índexs, covariant inferior dreta, contravariant superior esquerra).

[9]No hem posat els subíndexs corresponents als punts, p i $f(p)$, per tal d'alleugerir la notació.

1.3. Fibrats

1.3.1. ***Bundle*, fibrat.** Un fibrat [*bundle*, en anglès][10] és una terna,

$$(E, B, \pi),$$

formada per dos espais topològics, E i B, i una projecció,

$$\pi : E \longrightarrow B,$$

aplicació contínua i exhaustiva. B es diu espai base.

Exemple. El fibrat trivial: $(B_1 \times B_2, B_1, \pi_1)$, on B_1 i B_2 són espais topològics i π la projecció del seu producte cartesià sobre el primer espai (Fig. 1.16).

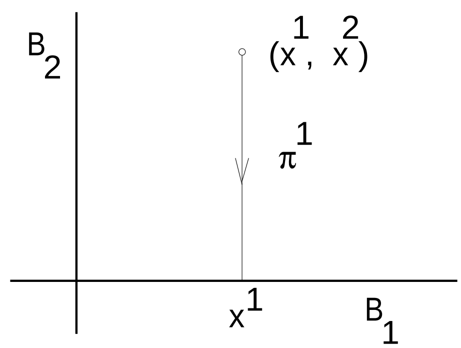


FIGURA 1.16. El fibrat trivial $(B_1 \times B_2, B_1, \pi_1)$. Aquí B_1 fa d'espai base i B_2 de fibra, però està clar que ho podríem considerar a l'inrevés.

La idea és generalitzar el producte cartesià d'espais topològics. Així tenim que mentre que el *cilindre*, $C = S^1 \times I$, és globalment un tal producte cartesià (d'una circumferència per un interval, finit o infinit), la *cinta de Möbius* només ho és localment. En poques paraules, un fibrat serà sempre, localment, el producte cartesià de dos espais topològics. Quan també ho sigui globalment, el fibrat es dirà *trivial*.

L'antiimatge d'un punt de l'espai base,

$$\pi^{-1}\{x\}, \quad x \in B,$$

rep el nom de fibra a x, F_x. Ens restringirem als casos en que totes les fibres siguin el mateix espai topològic:

$$F_x \cong F, \quad \forall x \in B,$$

i es diu que F és la fibra típica.

[10] S'ha de vigilar la nomenclatura en aquest tema, que no és del tot uniforme a la bibliografia internacional.

Observar que en el cas del cilindre tenim d'entrada dues estructures de fibrat possibles:

$$(S^1 \times I, S^1, \pi_1), \qquad (S^1 \times I, I, \pi_2).$$

En la primera l'espai base és S^1 i la fibra I, mentre que en la segona l'espai base és I i la fibra S^1.

1.3.2. ***Fibre bundle*, espai fibrat.** Un espai fibrat [*fibre bundle*, en anglès] és una quaterna,

$$(E, B, \pi, G),$$

on (E, B, π) és un fibrat, amb fibra típica que anomenarem F, i G és un grup topològic d'homeomorfismes de F a F, verificant-se que existeix un recobriment numerable de B per oberts,

$$\{U_i | i \in I^{\subset \mathbb{N}}\}, \quad B \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \quad U_i \text{ obert}, \quad \forall\, i \in I,$$

que satisfà:

(1) *Trivialitat local*

$$\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times F, \quad \forall\, i \in I,$$

i aquest homeomorfisme té la forma

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$$
$$\varphi_i(p) = (\pi(p), \widehat{\varphi}_i(p)), \qquad \widehat{\varphi}_i|_{F_x}^{\equiv \widehat{\varphi}_{i,x}} : F_x \longrightarrow F \text{ homeom}, \ \forall x \in U_i,$$

i el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i)^{\subset E} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"'] \\ U_i & \end{tikzcd}, \qquad \varphi_i \circ \pi_1 = \pi.$$

(2) *Correlació* entre els *subfibrats trivials*:

$$\forall\, i, j \in I, \quad \text{amb} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset, \qquad \widehat{\varphi}_{j,x} \circ \widehat{\varphi}_{i,x}^{-1}{}^{\in G} : F \longrightarrow F$$

pertany al grup estructural, G, $\forall\, x \in U_i \cap U_j$ (Fig. 1.17). Això dona, en efecte, l'estructura del fibrat (per exemple, el *twist* $x \mapsto -x$, a la banda de Möbius).

(3) L'*aplicació* (dependència en x de l'element del grup)

$$\begin{array}{rcl} g_{ij} : U_i \cap U_j & \longrightarrow & G \\ x & \mapsto & g_{ij}(x) = \widehat{\varphi}_{j,x} \circ \widehat{\varphi}_{i,x}^{-1} \end{array}$$

és *contínua*.

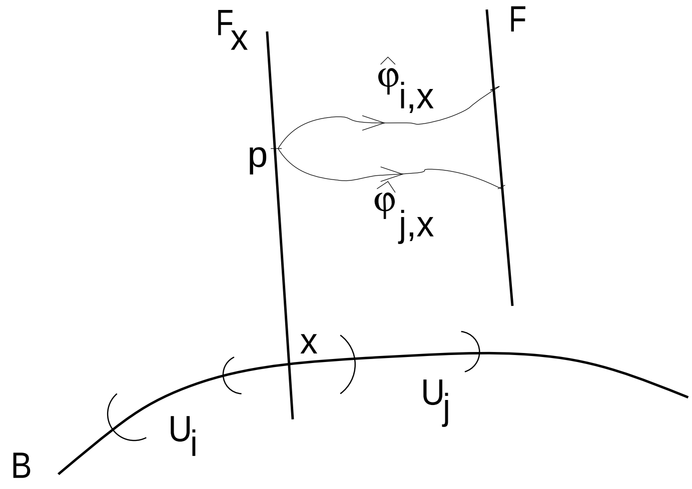


FIGURA 1.17. Correlació entre els *subbundles* trivials.

Per simplicitat, es parla a vegades del **fibrat** E.

Exemple: Banda de Möbius. Observem, com a exemple ben característic, la següent descripció de la **banda** o **cinta de Möbius**, donada a partir d'un rectangle fonamental al pla (Fig 1.18).

Cal entendre que, localment, la banda de Möbius no es diferencia d'un cil.lindre, i que una carta local és un rectangle obert. Ara bé, amb dos segments ja tenim un atles de S^1, i com que la part de la fibra, I, és trivial, resulta que amb dues cartes —en les que tindrem trivialització local— també n'hi haurà prou per descriure la banda de Möbius. Aquí hem pres S^1 de longitud $4a$ i recoberta per $U_1 \cup U_2$, amb (Fig 1.18)

$$U_1 = \{x \mid -2a < x < a\}, \qquad U_2 = \{x \mid 0 < x < 3a\}.$$

Hom té que

$$U_1 \cap U_2 = \{x \mid 0 < x < a\} \cup \{x \mid -2a < x < -a\} \equiv V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

La projecció és $\pi(p) = x_p \in S^1$, i la fibra típica és $I \in \mathbb{R}$. El grup estructural G que actua sobre les fibres és aquí el grup simètric de dos elements: $\mathcal{S}_2 = \{1, -1\}$, en altres paraules, $G = \mathbb{Z}_2$. (Noti's que en el cas del cilindre aquest grup és la identitat, $G = \{1\}$, cas trivial.) Tenim

$$\varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times I$$
$$\varphi_1(p) = (\pi(p), \widehat{\varphi}_1(p)), \qquad \widehat{\varphi}_1(p) \equiv i_p.$$

Ara tenim que:

(1) Si p és tal que $\pi(p) \in V_1$, aleshores

$$\widehat{\varphi}_{1,x_p}(p) = i_p, \quad \widehat{\varphi}_{2,x_p}(p) = i_p, , \quad \widehat{\varphi}_{1,x_p} \circ \widehat{\varphi}_{2,x_p}^{-1} = 1 \ \text{(identitat)}.$$

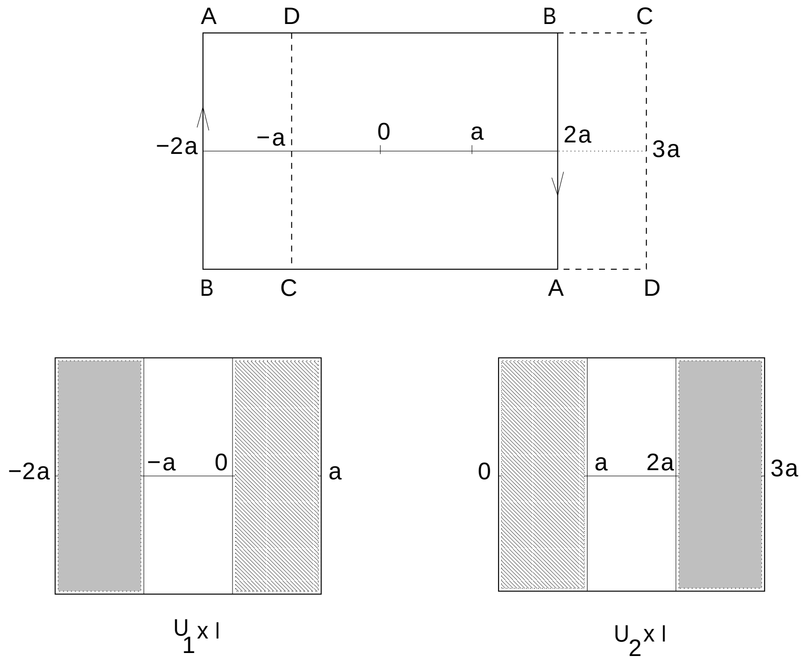


FIGURA 1.18. La banda de Möbius, descrita a partir d'un rectangle fonamental. A sota es donen dues cartes de la trivialització local, que tenen intersecció no buida.

(2) Si q és tal que $\pi(q) \in V_2$, aleshores

$$\widehat{\varphi}_{1,x_q}(q) = i_q, \quad \widehat{\varphi}_{2,x_q}(q) = -i_q,, \quad \widehat{\varphi}_{1,x_q} \circ \widehat{\varphi}_{2,x_q}^{-1} = -1 \ \text{(transposició).}$$

1.3.3. Morfisme de fibrats. És una parella d'aplicacions contínues, (F, f),

$$F : E_1 \longrightarrow E_2, \qquad f : B_1 \longrightarrow B_2,$$

tals que preserven les fibres, és a dir, tals que el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

1.3.4. Fibrat diferenciable C^k. Un fibrat és diferenciable C^k si E i B són varietats diferenciables C^k, π és una aplicació diferenciable C^k, G és un grup de Lie, el recobriment de B és un atles de la varietat, i les aplicacions g_{ij} de la darrera condició són diferenciables C^k.

Les coordenades del fibrat s'obtenen usant cartes locals de les varietats E i B.

Exercici. Fer aquest procés amb cura i veure quin aspecte tenen totes aquestes funcions del fibrat en coordenades locals.

1.3.5. Exemples importants de fibrats diferenciables.

1.3.5.1. *El fibrat tangent.* Sigui M_n una varietat diferenciable C^k de dimensió n. Considerem el conjunt de totes les parelles (p, v_p) amb $p \in M_n$, $v_p \in T_pM_n$. Diem-li a aquest conjunt TM_n. Pot ser dotat d'estructura de fibrat

$$(TM_n, M_n, \pi), \qquad \pi : (p, v_p) \mapsto p, \quad F = \mathbb{R}^n.$$

Donat un atles d'M_n, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, $\cup_{i\in I} U_i = M_n$, els homeomorfismes són ara $\psi_j = (\pi, {\varphi'}_j \circ \pi_2)$, éssent $\pi_2(p, v_p) = v_p$, i tenim la trivialització local

$$\begin{aligned} \psi_j : \pi^{-1}(U_j) &\longrightarrow U_j \times \mathbb{R}^n \\ (p, v_p) &\mapsto (p, {\varphi'}_j(v_p)). \end{aligned}$$

Les coordenades de (p, v_p) a la carta són del tipus $(x^1, \ldots, x^n; \xi^1, \ldots, \xi^n)$ (del punt i del vector tangent). Un canvi de coordenades de la fibra ve determinat aquí per un canvi de carta.

El grup estructural és, finalment, el grup lineal $G = GL(n, \mathbb{R})$, un grup de Lie.

1.3.5.2. *El fibrat de les referències.* Altre cop partim d'una varietat, M_n. Considerem ara la varietat, FM_n, formada per totes les referències, (p, f_p) (*frames*, d'ací la F) de l'espai tangent en tots els punts de M_n.

Fixada una base en un punt p, una nova referència a p ve donada per un element de $GL(n, \mathbb{R})$, que és doncs la fibra típica F en aquest cas, éssent el grup estructural, G, el de difeomorfimes de $GL(n, \mathbb{R})$ en sí mateix. Es tracta d'un fibrat principal que rep el nom de fibrat de les referències.

1.3.5.3. *Fibrat principal.* Es aquell en que F és el propi grup estructural, $F = G$, i G actúa sobre G per traslació (e.g. per la dreta, $\widetilde{R}_g$). En principi, aquesta acció la definim localment, però es demostra que no depèn de les cartes escollides a la definició, doncs

$$\widetilde{R}_g : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \pi^{-1}(U_i), \qquad \text{i donat } (\widetilde{R}_g p)_i \ \text{ és ara}$$
$$\widehat{\varphi}^{-1}_{1,x_p}(R_g\ g_i) = \widehat{\varphi}^{-1}_{1,x_p}(g_i g),$$

que no depèn d'U_i.

1.3.6. Camps.

1.3.6.1. *Secció.* D'un fibrat, (E, B, π), és qualsevol aplicació,

$$f : B \longrightarrow E, \quad \text{tal que} \quad \pi \circ f = I_B$$

(la identitat a B).

1.3.6.2. *Camp vectorial.* v a M_n varietat diferenciable: és tota secció del seu fibrat tangent, e.g., $v : p \mapsto (p, v_p)$ o, abreujadament, $v : p \mapsto v_p$.

1.3.6.3. *Teorema 1 (de trivialitat).* Un fibrat principal, (E, B, π, G), és trivial $\iff$ admet una secció contínua.

Demostració.

(1) $\exists$ secció $\Rightarrow$ trivial.
Sigui $f : B \longrightarrow E$ una secció, $\pi \circ f(x) = x$. Donat $p \in F_x$, $\exists!\ g \in G$ tal que $p = \widetilde{R}_g f(x)$ i $\varphi_f : E \longrightarrow B \times G$, $p \mapsto (x, g)$, és un homeomorfisme global que preserve l'estructura de les fibres

$$\varphi_f(\widetilde{R}_{g'} p) = \widetilde{R}_{g'} \varphi_f(p), \quad \forall g' \in G, \quad \forall p \in E,$$

doncs

$$\varphi_f(\widetilde{R}_{g'} \widetilde{R}_g f(x)) = (x, gg') = \widetilde{R}_{g'}(x, g) = \widetilde{R}_{g'} \varphi_f(p),$$

c.v.d.

(2) trivial $\Rightarrow \exists$ secció.
Evident, doncs $f : B \longrightarrow B \times G$, $x \mapsto (x, k(x))$, éssent $k : B \longrightarrow G$ qualsevol aplicació contínua.

1.3.7. Àlgebra de Lie.

1.3.7.1. *L'àlgebra de Lie dels camps vectorials.* Sigui XM_n el conjunt de tots els camps vectorials C^k de M_n, varietat diferenciable C^k. Podem definir a XM_n les següents operacions, $\forall v, w \in XM_n$, $\forall f, g \in C^k(M_n)$,

$$(i) \qquad (v + w)f = vf + wf,$$
$$(ii) \qquad (gv)f = g\,vf.$$

Ara bé, si intentem definir un producte així: $(vw)f = v(w(f))$, ens donarem compte immediatament que *vw no* és un camp vectorial (és un operador diferencial de segon ordre, veure-ho com a *exercici*). En canvi

$$(iii) \qquad [v, w] = vw - wv,$$

el parèntesi de Lie, sí que és un camp vectorial (un altre *exercici*), éssent aquesta una bona operació producte dels dos camps. En components,

$$\boxed{[v,w]f = (v^i\partial_i w^j - w^i\partial_i v^j)\partial_j f.}$$

Es tracta d'una operació: *distributiva* respecte de la suma, *anticommutativa*, i verifica la *identitat de Jacobi* (propietat que substitueix l'associativitat ordinària del producte).

Un espai vectorial amb un producte que té aquestes propietats es diu àlgebra de Lie (en realitat aquest n'és l'exemple originari, d'una tal estructura).

El parèntesi de Lie ens permet definir també una derivació de camps respecte de camps, la derivada de Lie:

$$\boxed{\mathcal{L}_v w \equiv [v,w].}$$

L'estudiarem a fons en el proper capítol.

Exercici. Demostrar que això és efectivament una derivació (lineal, regla de Leibniz).

1.3.7.2. *Teorema 2.* Si $f: M_1 \longrightarrow M_2$ és un difeomorfisme de varietats, aleshores la seva diferencial, $f': XM_1 \longrightarrow XM_2$, és un isomorfisme entre les respectives àlgebres de Lie.

Demostració. Cal fixar-se en la manera convenient d'escriure les coses: $(f'v)_{y=f(x)}(g) = v_x(g\circ f)$, és a dir,

$$[(f'v)(g)](y) = [v(g\circ f)](x) = [v(g\circ f)]\circ f^{-1}(y),$$

i per tant:

$$\boxed{(f'v)(g) = [v(g\circ f)]\circ f^{-1}.}$$

Ara ja podem fer la demostració. Tenim

$$(f'[v,w])(g) = [v,w](g\circ f)\circ f^{-1}$$

i, per l'altra banda (cal completar alguns passos, *exercici*),

$$\begin{aligned}[f'v, f'w](g) &= f'v(f'w(g)) - f'w(f'v(g)) = \cdots \\ &= v(w(g\circ f))\circ f^{-1} - w(v(g\circ f))\circ f^{-1} = f'[v,w](g).\end{aligned}$$

1.3.7.3. *L'àlgebra de Lie d'un grup de Lie.* Donat G grup de Lie, mirat com a varietat diferenciable, el seu espai tangent a e (element neutre del grup algebraic), T_eG, es pot dotar d'estructura d'àlgebra, amb el parèntesi de Lie com a producte:

$$\boxed{u,v\in T_eG, \quad u*v = [u,v].}$$

S'obté així l'**àlgebra de Lie** del grup:

$$\boxed{\mathcal{G} = T_e G.}$$

Exercicis.

(1) Demostrar que $T_e G$ amb el parèntesi de Lie com a producte ens dóna, en efecte, una àlgebra de Lie.
(2) Definir el fibrat cotangent, $T^* M_n$ (de manera semblant a com s'ha fet pel fibrat tangent).
(3) Definir el fibrat tensorial, $\mathcal{T} M_n$, el fibrat de formes diferenciables, $\Lambda_c M_n$, i els fibrats corresponents a les altres estructures que vàrem construir sobre la varietat M_n.

CAPíTOL 2

DERIVADA DE LIE

Abans hem introduït la derivació de Lie d'un camp vectorial respecte d'un altre d'una manera directa, que hom pot completar fàcilment a una definició axiomàtica precisa (s'aconsella fer-ho com a *exercici*, amb l'ajut d'un llibre de text). En lloc de seguir per aquest camí, en veurem ara una altra introducció, que ens ajudarà a entendre com actúa la derivada de Lie i quin sentit físic hom li pot atribuir.

2.1. La derivació de Lie

2.1.1. Teorema 1. Tot camp vectorial, v, suau (e.g., diferenciable amb continuïtat un cert nombre de vegades) i a suport compacte, K, en una varietat diferenciable C^k, M_n, indueix un pseudogrup local de transformacions, que anomenarem σ_t.

Demostració. La idea és la següent. Donat qualsevol atles, $\mathcal{A}$, de M_n, K queda recobert per un nombre finit de cartes de l'atles (Fig. 2.1). Per començar, sobre el complement (obert) de K, $M_n \setminus K$, definirem la transformació buscada com la identitat. Partint ara d'un punt $p \in K$, i d'una carta a la que pertanyi, usant els teoremes d'existència, unicitat i perllongament de la solució del sistema d'n equacions diferencials de primer ordre que el camp v determina a p (ho hem vist explícitament al Cap. 1), obtenim una corba integral de v, que passa per p i s'extén sobre tota aquesta carta local. Ara, amb les funcions de transició i en un nombre finit de passos, estenem la corba integral a tot el recobriment obert finit de K, i fent un darrer empalme amb la funció de transició, a tota la varietat (usant la carta de $M_n \setminus K$, en que el camp v val zero). En la demostració hi ha algún petit detall tècnic, com l'afegir troços de corba reparametritzant els intervals en que està definit cada troç, però completar això es deixa com a *exercici*.

Que el que obtenim és un pseudogrup (i no un grup) rau precisament en aquestes questions de detall: la composició $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$ només es pot dur a terme si $s, t \in I$ son prou petits per tal que $s + t \in I$ també.

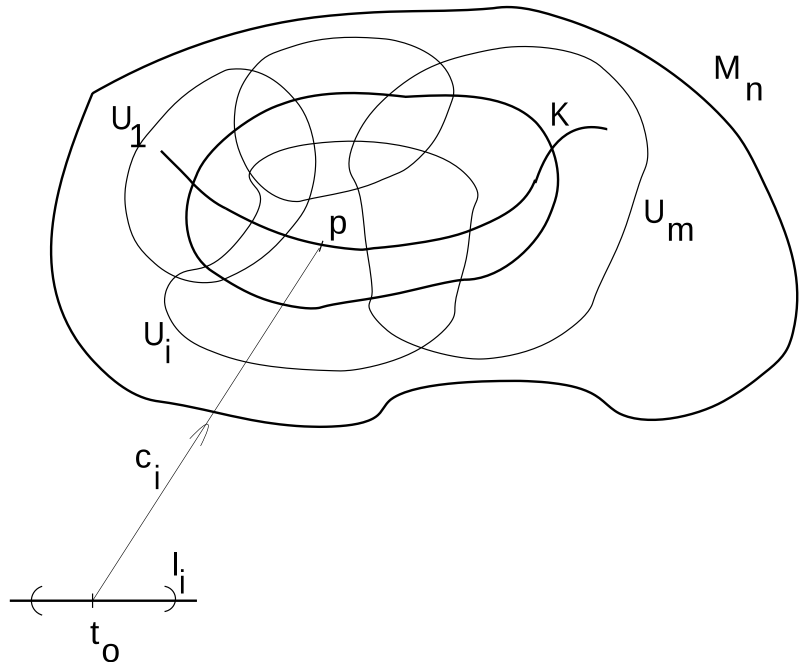


FIGURA 2.1. Pseudogrup local de transformacions induït per un camp vectorial, v.

2.1.2. Teorema 2. Si $f : M_n \longrightarrow M_n$ és un difeomorfisme de varietats i v un camp, generador d'un pseudogrup local de transformacions, σ_t, aleshores $f'v$ és generador del següent pseudogrup local de transformacions:

$$f \circ \sigma_t \circ f^{-1}.$$

Demostració. Veiem-ho partint de la definició

$$w(y) = \frac{d}{dt}\left[f \circ \sigma_t \circ f^{-1}(y)\right]\Big|_{t=0}, \quad y = f(x),$$

i anant per passos

$$\frac{d}{dt}\left[f^i \sigma_t(x)\right]\Big|_{t=0} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_t^j(x)} \frac{d\sigma_t^j(x)}{dt}\Big|_{t=0} = \left(f'v(x)\right)^i,$$

que coincideix efectivament amb el que volíem demostrar.

2.1.2.1. *Corolari.* El camp v és invariant per f sii f commuta amb σ_t.

Demostració. Fer-la com a *exercici*.

El pseudogrup local de transformacions, σ_t, representa a Física, molt sovint, un desplaçament de la varietat, éssent t el temps i la corba integral que pasa per p, la trajectòria —passada i futura— d'aquest punt de M_n (pensi's, com a exemple típic, en un volum fitat d'un fluid que es mou al llarg d'una canal). Resulta natural, aleshores, plantejar-se definir una derivada com a límit incremental de variacions al llarg de la trajectòria. Més precisament, el camp v, que origina σ_t i té per corbes integrals les trajectories esmentades, será el camp respecte del qual derivem un altre camp vectorial diferenciable arbitrari (o funció, o camp tensorial, etc.) sobre la varietat. Com és fàcil de pensar, la derivada d'un camp escalar (una funció) serà la derivada direccional ordinària, que estendrem mitjançant el concepte de derivada de Lie —introduït a continuació amb cura— als demés casos.

2.1.3. Derivada de Lie.

2.1.3.1. *Derivació d'un camp vectorial diferenciable.* La derivada de Lie del camp w respecte del camp v, amb $v, w \in TM_n$, es defineix com el límit (Fig. 2.2)

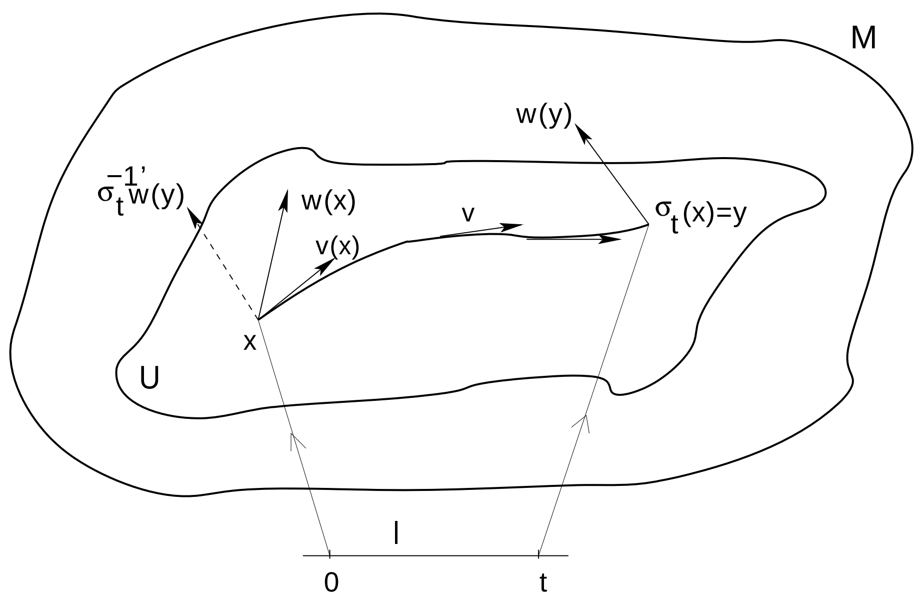


FIGURA 2.2. La derivada de Lie com a límit incremental.

$$\boxed{\mathcal{L}_v w(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\sigma_t^{-1\prime}(w(\sigma_t(x)) - w(x)\right].}$$

2.1.3.2. *Derivació d'un camp escalar.* La derivada d'un camp escalar (funció diferenciable) és, senzillament,

$$\boxed{\mathcal{L}_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(\sigma_t(x)) - f(x)\right],}$$

i no és altra cosa que la derivada direccional segons el camp v, com ja havíem dit.

2.1.3.3. *Derivació d'un camp d'1-formes.* La derivada de Lie d'un camp d'1-formes ω es pot també definir de manera directa mitjançant el *pull back* σ_t^*:

$$\boxed{\mathcal{L}_v \omega(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\sigma_t^*(\omega(\sigma_t(x)) - \omega(x)\right].}$$

La derivada de Lie s'ha d'interpretar com una expressió intrínseca (independent de les coordenades) de la 'derivada parcial' d'un camp (de qualsevol tipus) respecte d'un camp vectorial tangent. En aquesta definició queda també bastant clar el significat físic de la derivada de Lie: l'equació

$$\boxed{\mathcal{L}_v w = 0}$$

expresa la invariància de la magnitud w al llarg de l'evolució donada per la magnitud v. Per exemple, si v és un camp de velocitats d'un fluid i w és l'n-forma de volum d'aquest fluid, aquesta és l'expressió de la *incompressibilitat* del fluid: el fluid manté el mateix volum en el seu desplaçament (evol.lució temporal). De manera semblant es poden expressar altres lleis d'invariància o conservació de la Física, com ara el teorema de Liouville de conservació de l'element de volum a l'espai fàsic, etc. (veure les referències [**1, 4**], així com les del primer dels treballs proposats al final del Curs).

2.1.3.4. *Propietats.*

(1) La derivada de Lie està definida, en realitat, a l'àlgebra de germens dels camps tensorials diferenciables. En efecte,
   (a) Si u_1 i u_2 són dos camps tensorials diferenciables arbitraris i coincideixen en un entorn de la varietat:

$$u_1 = u_2 \quad \text{a} \quad U_p \subset M_n,$$

   aleshores

$$\mathcal{L}_v u_1 = \mathcal{L}_v u_2 \quad \text{a} \quad U_p,$$

   per a tot camp diferenciable v.

(b) Si v_1 i v_2 són dos camps tensorials diferenciables arbitraris i coincideixen en un entorn de la varietat,

$$v_1 = v_2 \quad \text{a} \quad U_p \subset M_n,$$

aleshores

$$\mathcal{L}_{v_1} u = \mathcal{L}_{v_2} u \quad \text{a} \quad U_p,$$

per a tot camp diferenciable u.

(2) La derivada de Lie és una derivació a l'àlgebra de germens dels camps tensorials diferenciables. En efecte,

(a) $\boxed{\mathcal{L}_v(u_1 + u_2) = \mathcal{L}_v u_1 + \mathcal{L}_v u_2,}$

(b) $\boxed{\mathcal{L}_v(u_1 \otimes u_2) = (\mathcal{L}_v u_1) \otimes u_2 + u_1 \otimes \mathcal{L}_v(u_2).}$

Exercicis.

(1) Podem definir la derivada de Lie a partir de $\mathcal{L}_v u = [v, u]$, d'aquestes propietats (linealitat i regla de Leibniz) i d'una condició suplementària: $\mathcal{L}_v$ commuta amb la contracció de tensors, i, és a dir,

$$\mathcal{L}_v \; i = i \; \mathcal{L}_v.$$

Veure la coincidència amb la definició d'abans, en termes d'un límit.

(2) En particular, veure directament, en aquesta definició axiomàtica, com s'obté $\mathcal{L}_v \omega$ a partir de $\mathcal{L}_v u = [v, u]$, la regla de Leibniz i la commutació amb les contraccions.

2.1.3.5. *Expressió en coordenades locals.* Es fàcil veure, com a resultat dels exercicis anteriors, que:

$$\text{(a)} \qquad \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} u = \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\text{(b)} \qquad \mathcal{L}_v u = [v, u] = \left(v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\text{(c)} \qquad \mathcal{L}_v \frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial v^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\text{(d)} \qquad \mathcal{L}_v dx^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j,$$

Exercici. Veure que la derivada de Lie del camp tensorial

$$t = t^i_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k$$

ve donada per

$$(L_v t)^i_{jk} = v^h \partial_h t^i_{jk} - t^h_{jk} \partial_h v^i + t^i_{hk} \partial_j v^h + t^i_{jh} \partial_k v^h.$$

2.2. Distribucions. Teorema de Fröbenius

2.2.1. Distribució. En una varietat diferenciable M_n, una distribució, S, de dimensió r és assignar a cada punt, $p \in M_n$, un subespai $r-$dimensional, S_p de l'espai tangent T_pM_n. En altres paraules, és una secció del fibrat d'espais r-dimensionals sobre la varietat M_n com a base.

Distribució diferenciable, S: ho és quan $\forall\, p \in M_n, \exists\, U_p$ i r camps diferenciables, $v_1, \ldots, v_r$ que formen una base de S_q, $\forall\, q \in U_p$ (base local).

Distribució involutiva: ho és quan $\forall\, u, v \in S$ hom té que $[u, v] = 0$. Recordant la regla d'igualtat de les derivades segones creuades, és fàcil donar-se compte de que aquesta és la condició de *compatibilitat* (o *integrabilitat*). Ho veurem tot seguit. Abans, però, vegem que no tota distribució és involutiva, amb un contraexemple senzill.

Contraexemple. Veure que la següent distribució *no* és involutiva. Partim del grup de Lie SO(3) i considerem els subespais de vectors tangents a l'element neutre (matriu identitat I)[1]

$$E_I = \left\{ A \in T_I SO(3) \;\mid\; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \,,\ \forall\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

que és un espai de dimensió dos, i el subespai de vectors tangents a un altre punt Q

$$E_Q = \left\{ B \in T_Q SO(3) \,|\, Q^{-1}B \in E_I \right\}.$$

Considerem ara:

$$E = \bigcup_{Q \in SO(3)} E_Q.$$

Això és una distribució, però no és involutiva.

En efecte, és fàcil comprovar que $V_{p=1,q=0}$ i $V_{p=0,q=1}$ no satisfan la condició (fer-ho com a *exercici*).

2.2.2. Varietat integral. Donada una distribució diferenciable, S, una varietat integral, C, és tota subvarietat diferenciable connexa, $C \subset M_n$ ($i : C \hookrightarrow M_n$ *imbedding*), tal que $i'(T_pC) = S_p, \forall\, p \in C$.

Quan no hi ha cap altra varietat integral de S que contingui C estrictament, aleshores C és una varietat integral maximal de S.

[1] Recordem del capítol anterior, que es tracta de l'àlgebra de Lie del grup.

2.2.3. Teorema de Fröbenius per a distribucions. Sigui S una distribució diferenciable involutiva a M_n. Aleshores, $\forall\, p \in M_n$ hi passa una i una sola varietat integral maximal, C_p de S. Tota varietat integral de S que passa per p és una subvarietat oberta de C_p.

Demostració. Consultar-la en un llibre de text (*exercici*).

2.3. Grup de Lie de transformacions

Sigui G un grup de Lie de dimensió m i M un varietat diferenciable de dimensió n. Un grup de Lie de transformacions és una aplicació diferenciable

$$\begin{array}{rcl} \sigma : G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,p) & \mapsto & \sigma(g,p) \end{array}$$

tal que el conjunt de transformacions $\{\sigma_g : M \to M \mid \sigma_g(p) = \sigma(g,p)\}$ amb la composició d'aplicacions satisfà:

$$\begin{aligned} &\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h, \\ &\sigma_e = I, \end{aligned}$$

on e és l'element neutre del grup [*Einheit*, unitat] i es dedueix immediatament que

$$\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}.$$

Definicions.

- G opera efectivament a M si:
  $\sigma_g(p) = p, \forall\, p \in M \Rightarrow g = e$.
- G opera transitivament a M si:
  $\forall\, p, q \in M, \exists g \in G$ tal que $\sigma_g(p) = q$.

2.3.1. Subgrup uniparamètric de transformacions. Un subgrup uniparamètric de transformacions ve donat per una corba diferenciable sobre el grup G

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ t & \mapsto & g(t) \end{array}$$

tal que es satisfà

$$\begin{aligned} &g(t)g(s) = g(t+s), \\ &g(0) = e. \end{aligned}$$

2.3.2. Aplicació exponencial. Donat un vector, γ, de l'espai tangent a l'element neutre del grup de Lie, T_eG ($\equiv \mathcal{G}$ àlgebra de Lie), considerem la recta $\{t\gamma \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ i l'aplicació d'aquesta línia sobre el subgrup uniparamètric de G donat per l'única corba que passa per l'origen (element neutre, e) i és tangent a γ en aquest punt. Aquesta aplicació rep el nom d'aplicació exponencial

$$\begin{array}{rcl} \exp\ : T_eG & \longrightarrow & G \\ t\gamma & \mapsto & \exp\,(t\gamma) \equiv g_\gamma(t) \end{array}$$

doncs té efectivament les propietats de la funció exponencial (la imatge de la suma és el producte de les imatges):

$$\exp\,(t\gamma)\exp\,(s\gamma) = g_\gamma(t)g_\gamma(s) = g_\gamma(t+s) = \exp\,((t+s)\gamma).$$

Observar que aquest procés és el de reconstrucció del grup de Lie a partir de la seva àlgebra de Lie, que és l'invers del que es segueix per a obtenir l'àlgebra de Lie del grup per derivació a l'origen (o element neutre del grup) .

2.3.3. Vector de Killing. El camp vectorial que genera un grup uniparamètric de transformacions $\left\{\sigma_{g(t)} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ es diu vector de Killing a la varietat de transformacions M relativa al grup G. Sovint G és el grup d'isometries (transformacions que conserven la mètrica de la varietat, cas molt important a Física, on un espai sense mètrica és difícil que tingui sentit).

La corba integral que passa per $p \in M$ del vector de Killing v satisfà

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_p(g(t))}{dt} &= v(\sigma_p(g(t))), \\ \sigma_p(e) &= p. \end{aligned}$$

Però, com acabem de veure, un subgrup uniparamètric queda definit pel vector tangent a e:

$$\boxed{\gamma = \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0},}$$

i si li diem v^γ al corresponent vector de Killing (a e), el camp de Killing al llarg de la corba és

$$v^\gamma(p) = \frac{d\sigma_p(g(t))}{dt} = \left.\frac{d\sigma_{g(t)}(p)}{dt}\right|_{t=0} = {\sigma_p}'(e)\gamma.$$

S'ha de fer notar la importància de la darrera expressió: el valor del camp de Killing a qualsevol punt, p, s'obté per actuació de la matriu jacobiana del grup uniparamètric sobre el vector de Killing, γ, que és independent de $g(t)$.

2.3.4. Translacions i camps invariants. En un grup de Lie G, es defineixen les translacions per l'esquerra corresponents als seus elements, $g \in G$ com les aplicacions del grup en el grup

$$L_g : G \longrightarrow G, \quad L_g(h) = gh,$$

i les translacions per la dreta de manera similar

$$R_g : G \longrightarrow G, \quad R_g(h) = hg.$$

Evidentment no coincideixen, en general, si el grup no és abelià.

2.3.4.1. *Camps vectorials invariants (dreta, esquerra).* Un camp vectorial v a G és invariant per l'esquerra si

$${L_g}' v(h) = v(L_g h) = v(gh), \quad \forall\, g, h \in G,$$

d'on

$${L_g}' \gamma = v(g), \quad \gamma = v(e), \quad \forall\, g \in G.$$

Però aquesta segona condició (molt més lleugera que la definició) és suficient, doncs

$$v(L_g h) = v(gh) = {L_{gh}}' v(e) = (L_g \circ L_h)' v(e) = {L_g}'({L_h}' v(e)) = {L_g}' v(h).$$

2.3.4.2. *Teorema 4.* (i) Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de camps vectorials invariants per l'esquerra i el conjunt de vectors tangents a G en e: $T_e G = \mathcal{G}$. (ii) Idem canviant esquerra per dreta.

Demostració. Immediata, a partir de lo anterior.

2.3.4.3. *Teorema 5.* El conjunt de camps vectorials invariants per l'esquerra (dreta) és tancat sota parèntesi de Lie.

Demostració. Es deixa com a *exercici*.

2.3.5. Les constants d'estructura de l'àlgebra de Lie. Una conseqüència dels teoremes anteriors és l'existència de les constants d'estructura de l'àlgebra de Lie:

$$\boxed{[v_\alpha, v_\beta] = c_{\alpha\beta}^{\gamma} v_\gamma.}$$

2.3.5.1. *Propietats.*

(1) Antisimetria:

$$\boxed{c_{\alpha\beta}^{\gamma} = -c_{\beta\alpha}^{\gamma}.}$$

(2) Identitat de Jacobi:

$$\boxed{c_{\alpha\beta}^{\gamma} c_{\gamma\sigma}^{\rho} + c_{\beta\sigma}^{\gamma} c_{\gamma\alpha}^{\rho} + c_{\sigma\alpha}^{\gamma} c_{\gamma\beta}^{\rho} = 0.}$$

(3) Trilinealitat: es transformen com un tensor de rang tres, sota canvis de base

$$\boxed{c^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L^{\gamma}}{\partial g^{\alpha} \partial h^{\beta}} - \frac{\partial^2 L^{\gamma}}{\partial g^{\beta} \partial h^{\alpha}}\bigg|_{g=h=e}.}$$

Demostració. Es deixa com a *exercici.*

2.3.5.2. *Teorema 6 (d'abelianitat).* Un grup de Lie G té totes les constants d'estructura $c^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ sii és localment isomorf a $\mathbb{R}^n$, i.e., sii és abelià.

Demostració. Fer-la amb l'ajut d'un llibre de text.

CAPíTOL 3

GRUPS I ÀLGEBRES DE LIE. CLASSIFICACIÓ

3.1. Grups discrets

Conscients de que gran part del contingut d'aquesta primera secció es ja ben conegut, això ens permetrà tractar-la d'una manera ràpida, gairebé telegràfica. Si s'inclou aquí és pensant en la completesa del tema. Malauradament, degut al poc temps disponible en un Curs d'aquesta mena, alguns conceptes molt fonamentals, hi manquen del tot, com és el cas dels diagrames de Young i l'estudi aprofundit del grup simètric i d'altres grups discrets, que se suposaran ja vistos durant la llicenciatura.

3.1.1. Exemples de grups discrets.

(1) Grup cíclic d'ordre n. Es tracta, sens dubte, de l'exemple més senzill de grup. El generat per l'element c, és el següent (en llenguatge multiplicatiu i éssent e l'element neutre, *Einheit*):

$$\boxed{C_n = \left\{e, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\right\} \;\simeq\; \mathbb{Z}_n.}$$

Es pot concretar a partir de c, una arrel cúbica de 1, que en el pla complex origina un n-àgon amb vèrtexs sobre la circumferència unitat. En la versió aditiva, és l'anell de les classes de reste mòdul n, $\mathbb{Z}_n$.

(2) Grup dihèdric d'ordre $2n$. Engendrat per dos elements, c i b, tals que:

$$\boxed{D_n = \langle c, b\rangle, \qquad c^n = b^2 = (bc)^2 = e.}$$

Cas particular important és quan $n = 2$:
el Vierergruppe (o grup de quatre) $D_4 = V$.

(3) Grup de permutacions S_n. Un element n'és:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.}$$

Recordem la seva descomposició en cicles, per exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)\,(3) = (1\ 2\ 4)\,,$$

ja que els cicles d'un sol element (invariant) no cal posar-los. Per $n = 3$:

$$S_3 = \{(1), (2), (3), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}\,.$$

Tenim que

$$S_3 \simeq D_3, \qquad c \mapsto (1\ 2\ 4)\,, \quad b \mapsto (2\ 3).$$

En general, C_n i D_n són sempre subgrups de S_n. És conseqüència del següent i molt important teorema.

3.1.1.1. *Teorema de Cayley.* Tot grup finit d'ordre n és isomorf a un subgrup del grup de permutacions S_n.

Demostració. Ve del simple fet[1] que tot element de qualsevol grup $g \in G$ es pot veure com una permutació de G; i encara com més d'una, doncs es pot fer actuar de diverses maneres, típicament: per l'esquerra, per la dreta, o bé per les dues bandes a la manera adjunta o normal (recordar-ne els detalls, com a *exercici*). Sigui:

$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad L_g(h) = g\,h,$$

és sempre en efecte una permutació, doncs

$$\begin{aligned} g\,g_j = g\,g_k \quad &\Longrightarrow \quad g_j = g_k, \\ g\,g_j = g'\,g_j \quad &\Longrightarrow \quad g = g', \end{aligned}$$

d'on

$$\boxed{G \longrightarrow S_n, \qquad g \mapsto L_g}$$

és injectiva i un homomorfisme de grups (e.g., respecta l'estructura del grup).[2]

3.1.1.2. *El grup alternant.* Es tracta del subrup de S_n format per les permutacions parelles (signe més).

[1]Que en part s'ha vist ja abans: les translacions per l'esquerra i per la dreta.

[2]El mateix podríem fer amb les actuacions per la dreta i adjunta, que ens portarien a una conclusió semblant, encara que les permutacions obtingudes en els diversos casos per a un mateix element del grup serien, en general, diferents.

3.1.2. Representació. Una representació d'un grup, G, és un homomorfisme, D (de l'alemany *Darstellung*, representació) del grup G en el grup lineal d'un cert espai vectorial, que si és de dimensió n podem sempre agafar com $GL(n,\mathbb{C})$ (cas complex, en general, evidentment també hi ha les representacions reals):

$$\begin{aligned} D : G &\longrightarrow GL(n,\mathbb{C}) \\ g &\mapsto T_g, \qquad \text{amb } T_{g\,g'} = T_g\,T_{g'}. \end{aligned}$$

Per exemple, per al grup de rotacions a $\mathbb{R}^3$, es pot fer la seva representació mitjançant matrius $n \times n$, reals o complexes, car

$$\boxed{R \in SO(3) \subset GL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{C}).}$$

Recordem que quan la representació es fa sobre les funcions d'ona,

$$\boxed{\psi'(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}),}$$

indueix en la pràctica una transformació d'algún d'aquests tipus.

Exemple. En el cas de les funcions d'ona pròpies de l'operador Hamiltonià de l'àtom d'hidrògen, etiquetades amb (n,l,m),

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, \qquad L^2 = l(l+1)\hbar^2, \qquad L_z = m\hbar.$$

En ser (M és la massa)

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(r), \qquad L^2,$$

invariants sota rotacions, només canvia m, i hom té:

$$u'_{nlm}(\vec{x}) = \sum_{m'} D^l_{mm'}(R)\, u_{nlm'}(\vec{x}),$$

on les matrius de representació, $D^l_{mm'}(R)$, son $(2l+1) \times (2l+1)$ i les funcions d'ona factoritzen en una part radial i un harmònic esfèric:

$$u_{nlm}(\vec{x}) = R_n(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Hom té, efectivament, una representació,

$$\boxed{D(R_1R_2) = D(R_1)\, D(R_2),}$$

de dimensió $2l+1$ del grup de rotacions en tres dimensions, $SO(3)$.

3.1.2.1. *Equivalència de representacions.* Direm que dues representacions d'un grup G, $D^{(1)}$ i $D^{(2)}$, són equivalents sii:

$$\boxed{D^{(1)} \sim D^{(2)} \iff \exists\, S \ \text{ tal que } \ D^{(1)}(g) = SD^{(2)}(g)S^{-1},\ \forall\, g \in G.}$$

3.1.2.2. *Caràcters d'una representació.* És el conjunt de les traces de les matrius de representació:

$$\boxed{\chi = \{\chi(g) \mid \chi(g) = \operatorname{tr} D(g),\ g \in G\}\,.}$$

3.1.2.3. *Teorema sobre els caràcters.* Si dues representacions tenen els mateixos caràcters aleshores són equivalents.

Demostració. Es deixa com a *exercici.*

3.1.2.4. *Representacions reduïble i completament reduïble.*

- D completament reduïble sii es pot posar com:

  $$\boxed{D = D^{(1)} \oplus D^{(2)},}$$

  és a dir que les matrius de representació poden ser descomposades en blocs diagonals.
- D reduïble sii en una certa base:

  $$\boxed{D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}, \qquad \forall\, g \in G,}$$

  és a dir que les matrius de representació poden ser triangularitzades.

3.1.3. Teorema de Maschke. Ens diu que per a un grup discret (finit) o bé per a un grup contínuo (infinit) compacte, en tota representació reduïble es pot prendre $C(g) = 0, \forall\, g \in G$, és a dir que és completament reduïble. Per tal de demostrarlo convé introduïr (o recordar, si ja fossin coneguts) un parell de conceptes importants.

3.1.3.1. *G-mòdul.* És un espai vectorial, U, sobre el qual hi actua una representació del grup G (com a transformacions lineals). D'una altra manera:

$$U \text{ espai vectorial, tal que } \quad GU \subset U,$$

éssent l'actuació lineal.

3.1.3.2. *Transformació unitària.* En un espai vectorial V, en el qual hi ha definit un producte escalar, (u, v), una transformació unitària és una aplicació lineal, T, tal que

$$(Tu, Tv) = (u, v), \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Ara ja estem en condicions de demostrar el teorema de Masche.

3.1.3.3. *Demostració del teorema.* Partint del producte escalar, (u, v), de l'espai de representació V, construïm primer un producte escalar (li direm $\{\ ,\ \}$), invariant sota l'acció del grup, de la següent manera:

$$\boxed{\{u, v\} \equiv \frac{1}{[g]} \sum_{g \in G} (T(g)u, T(g)v),}$$

on per $[g]$ indiquem l'ordre del grup. Tenim efectivament que això és un producte escalar i a més (completar tots els detalls com a *exercici*):

$$\{T(h)u, T(h)v\} = \cdots = \{u, v\}, \quad \forall\, h \in G.$$

És a dir que $T(h)$ és unitari, $\forall\, h \in G$, respecte d'aquest producte escalar $\{\ ,\ \}$.

Triant una base ortonormal respecte d'aquest producte escalar, en el subespai $U \subset V$ (que correspon a la part triangular superior de la descomposió reduïble), obtenim una representació completament reduïble, cosa que podem fer sempre en el cas finit.

En el cas d'un grup contínuo compacte, la demostració es fa exactament igual, substituïnt simplement la suma finita per la integral (convergent) en termes de la mesura del grup (μ, mesura de Haar):

$$\boxed{\sum_{g \in G} \mapsto \int_G d\mu(g).}$$

3.1.4. Propietats de les representacions reduïbles: lemmes de Schur.

3.1.4.1. *Primer lemma de Schur.* Una matriu que commute amb totes les matrius d'una representació irreduïble és sempre un múltiple de la matriu identitat, I:

$$\boxed{A\, D(g) = D(g)\, A, \quad \forall\, g \in G \implies A = \lambda\, I.}$$

Demostració. Sigui A,

$$A\, D(g) = D(g)\, A, \quad \forall\, g \in G,$$

amb D representació irreduïble. Sigui v un vector propi de A.

$$A\, v = a\, v.$$

Aleshores, tenim que

$$A\, T(g)\, v = T(g)\, A\, v = a\, T(g)\, v, \quad \forall\, g \in G,$$

d'on el subespai $\{v\}$ és tot ell pròpi i com que la representació és irreduïble, necessàriament: $\{v\} = V$, és a dir que $A = a\, I$, c.v.d.

3.1.4.2. *Segon lemma de Schur.* Donades dues representacions irreduïbles, D i D', si una matriu A verifica

$$\boxed{A\,D(g) = D'(g)\,A, \quad \forall\, g \in G \implies A = 0.}$$

Demostració. Raonem en termes de les respectives dimensions, n i n', de les representacions

(1) $n < n'$. La imatge, per A, de $U = V_n$, és un submòdul, $U' = \text{Im}\, A$, de $V_{n'}$ (en efecte, car $AD(g)v = D'(g)Av$), i per tant ha de ser o bé 0 o bé tot $V_{n'}$ (Fig. 3.1). Però aquest darrer cas

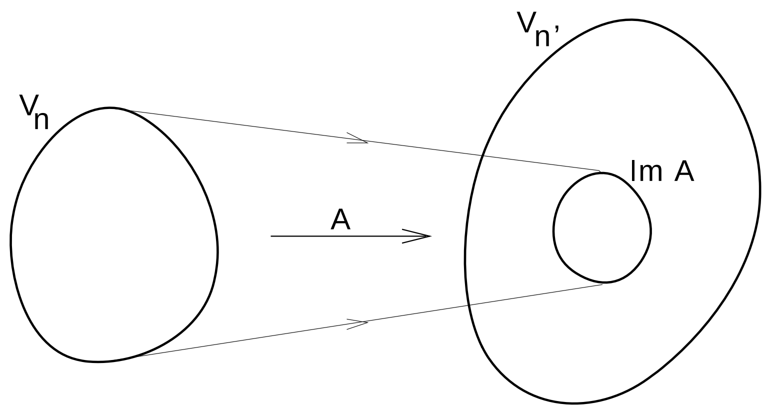


FIGURA 3.1. L'operador A, quan $n < n'$: Im A és un sub$G$-mòdul de $V_{n'}$.

no és possible, doncs $n < n'$, i d'aquí: $A = 0$.

(2) $n > n'$. El nucli d'A, $U = \text{Ker}\ A$, és un submòdul de V_n. Noti's, en efecte, que si $v \in \text{Ker}\ A$, aleshores $AD(g)v = 0$, d'on $D(g)v \in \text{Ker}\ A$ i Ker A és invariant per D, e.g., un submòdul (Fig. 3.2), i com que no pot ser 0 (car $n > n'$ i A no pot ser injectiva), ha de ser necessàriament $U = V_n$, d'on, altre cop, $A = 0$.

(3) $n = n'$. Trivial, dons la inequivalència de les representacions obliga directament a que $A = 0$.

3.1.5. Teorema fonamental d'ortogonalitat. Donats U_μ i U_ν, G-mòduls portadors de dues representacions irreduïbles inequivalents de G, i A una aplicació lineal arbitrària

$$A : U_\nu \longrightarrow U_\mu,$$

l'operador

$$B = \sum_g T^{(\mu)}(g) A T^{(\nu)}(g^{-1})$$

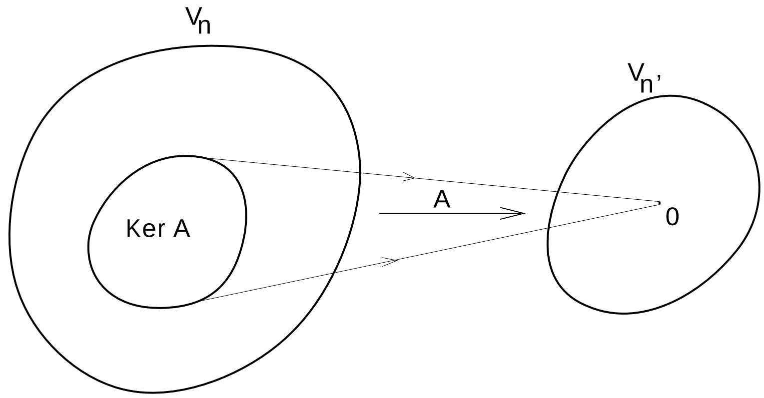


FIGURA 3.2. L'operador A, quan $n > n'$: Ker A és un sub$G$-mòdul de V_n.

verifica que

$$T^{(\mu)}(h)B = BT^{(\nu)}(h), \qquad \forall\, h \in G$$

i, per tant, resulta que (noti's que B fa ara el paper de la A en els lemmes de Schur):

(1) Pel primer lemma de Schur, si $\mu = \nu$, aleshores $B = \lambda I$.
(2) Pel segon lemma de Schur, si $\mu \neq \nu$, aleshores $B = 0$.

Això ho podem expressar de manera resumida com:

$$\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g)AD^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)}\delta^{\mu\nu}I.$$

Fent això per totes les matrius, $A^{(rs)}$, d'una base, e.g.,

$$A^{(rs)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ (r) \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{o, equivalentment,} \quad A_{lm}^{(rs)} = \delta_{lr}\delta_{ms}.$$

La component ij d'aquesta igualtat és:

$$\sum_{g\in G} D_{ir}^{(\mu)}(g)D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}.$$

I la contracció dels índexs ij dóna:

$$\sum_{g\in G} \left(D^{(\mu)}(g^{-1})D^{(\nu)}(g)\right)_{rs} = n_\mu\lambda_{rs}^{(\mu)}, \quad \text{o sigui que} \quad [g]\delta_{rs} = n_\mu\lambda_{rs}^{(\mu)},$$

i per tant

$$\boxed{\sum_{g\in G} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{rs}.}$$

Si considerem ara (sense pèrdua de generalitat) el cas d'un grup unitàri, tenim

$$\sum_{g\in G} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{[g]}{n_\mu}\,\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{rs}.$$

El que tenim a l'esquerra són n_μ^2 vectors (cada un d'ells de $[g]$ components) ortogonals tots entre sí, i per tant, per força:

$$\sum_\mu n_\mu^2 \leq [g].$$

Es demostra, per altra banda, la desigualtat en sentit contrari (fer-ho, com a *exercici*), i finalment tenim que:

$$\sum_\mu n_\mu^2 = [g].$$

3.1.5.1. *Ortogonalitat dels caràcters.* Del teorema d'ortogonalitat anterior, prenent traces, tenim

$$\boxed{\frac{1}{[g]}\sum_{g\in G} \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu}.}$$

Ara bé, si D és una representació unitària (cosa que sempre es pot aconseguir en el cas d'un grup finit o compacte), $D^{-1} = D^\dagger$, resulta que:

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(D(g^{-1})) = \mathrm{Tr}\,(D(g)^\dagger) = \chi^*(g)$$

i si, a més, definim el producte escalar de caràcters com

$$\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle \equiv \frac{1}{[g]}\sum_{g\in G} \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)*}(g),$$

aleshores

$$\boxed{\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \delta^{\mu\nu}.}$$

D'on veiem immediatament que el nombre de representacions irreduïbles és menor o igual que el nombre de classes conjugades (a tots els components d'una classe els hi correspon un mateix caràcter)[3]. En

[3]Per la propietat cíclica de la traça: $\mathrm{tr}\ SAS^{-1} = \mathrm{tr}\ A$.

realitat tenim una igualtat entre ambdues coses, car (veure-ho, com a *exercici*):

$$\frac{1}{[g]}\sum_{\mu} k_i \chi_i^{(\mu)}(g)\chi_j^{(\mu)*}(g) = \delta_{ij},$$

éssent k_i el nombre d'elements de la classe conjugada i.

3.1.6. Descomposició d'una representació en representacions irreduïbles. Tot això serà vàlid, altre cop, per grups finits o compactes. Donem sentit a la descomposició

$$\boxed{D = \bigoplus_{\nu} a_\nu D^{(\nu)},}$$

on entenem que les $D^{(\nu)}$ són irreduïbles. Prenent traces, $\chi_i(g) = \sum_\mu a_\mu \chi_i^{(\mu)}(g)$, obtenim les a_μ's en termes dels caràcters:

$$a_\mu = \frac{1}{[g]}\sum_{g\in G} \chi_i(g)\chi_i^{(\mu)}(g^{-1}).$$

En altres paraules, en llenguatge vectorial:

$$\boxed{\chi = \sum_{\mu} a_\mu \chi^{(\mu)}, \qquad a_\mu = \langle \chi^{(\mu)} | \chi \rangle.}$$

3.1.6.1. *Exemple: la representació regular.* Recordant el teorema de Cayley, aquesta representació correspon a prendre l'actuació dels elements de G per l'esquerra. Després de numerar-los (cas G finit)[4],

$$G = \{g_i\}_{i=1,\ldots,[g]},$$

tenim:

$$g\, g_i = \sum_j D_{ji}(g)\, g_j.$$

Llegint directament els coeficients que apareixen trobem D, la representació regular.

Volem ara descompondre-la en representacions irreduïbles. Cerquem primer els seus caràcters:

$$\chi_i(g) = \begin{cases} 0, & g \neq e, \\ [g], & g = e, \end{cases} \qquad \text{d'on} \qquad a_\mu = \chi^{(\mu)}(e) = \operatorname{Tr} I^{(\mu)} = n_\mu,$$

que és la dimensionalitat de $D^{(\mu)}$. En deduïm que per

$$\begin{cases} g = e, & \chi(e) = \sum_\nu a_\nu \chi^{(\nu)}(e) \implies [g] = \sum_\nu n_\nu^2, \\ g \neq e, & 0 = \sum_\nu n_\nu \chi^{(\nu)}(g). \end{cases}$$

[4] Si G és continu i compacte, tot es fa igual, només cal substituir la suma per una integració amb la mesura del grup

I comprovem l'ortogonalitat de manera directa en aquest exemple:

$$\langle\chi(e)|\chi(g)\rangle = \begin{cases} 0, & g \neq e, \\ 1, & g = e. \end{cases}$$

3.1.7. Construcció de la taula de caràcters, en el cas general. S'intenta fer sempre pel camí més ràpid possible, emprant les relacions que hem descobert. En resum:

(1) Que el nombre de representacions irreduïbles (*irreps*) és igual al nombre de classes conjugades, abreujadament,
$\boxed{\#\ \text{irreps} = \#\ \text{class conjs.}}$

(2) $\boxed{\sum_\nu n_\nu^2 = [g]}$
l'ordre del grup finit (o la seva mesura finita en el cas compacte).

(3) $\boxed{\sum_{i=1}^{r} k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = [g]\delta^{\mu\nu}}$ l'ortogonalitat dels caràcters.

(4) Qualsevol *altra informació* que haguem recollit sobre el grup.

3.1.7.1. *Exemple:* $C_3 = \mathbb{Z}_3$. Recordem que $C_3 = \{e, c, c^2\}$. Com que $c^3 = e$, qualsevol representació ha de complir:

$$\chi(c)^3 = \chi(c^3) = \chi(e) = 1,$$

i les úniques possibilitat són les tres arrels cúbiques d'1: $1, \omega, \omega^2$. Ho resumim a la taula 3.1. La primera és una representació abeliana

C_3	e	c	c^2
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

TAULA 3.1. Taula de caràcters de les tres representacions irreduïbles de C_3.

trivial, A, mentre que les altres dues constitueixen, en conjunt, una representació bidimensional, E. Altre cop podem comprovar l'ortonormalitat dels caràcters de manera directa, p.ex.,

$$\langle\chi^{(1)}|\chi^{(2)}\rangle = \frac{1}{3}(1 + \omega + \omega^2) = 0, \quad \text{etc.}$$

3.1.8. El producte directe de representacions i la seva descomposició. En aquest llenguatge *producte directe* s'usa com a sinònim de producte tensorial. Tenim:

$$\boxed{D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} = \bigoplus_{\sigma} a_\sigma D^{(\sigma)}}$$

i els coeficients de la descomposició reben el nom de coeficients de Clebsch-Gordan.

Del fet que

$$\boxed{\chi_i^{(\mu\otimes\nu)}(g) = \chi_i^{(\mu)}(g)\chi_i^{(\nu)}(g),}$$

obtenim

$$\boxed{a_\sigma = \langle \chi^{(\sigma)} | \chi^{(\mu)} \chi^{(\nu)} \rangle.}$$

3.2. Grups continus i àlgebres de Lie

Com ja hem dit abans, les qüestions introductòries sobre aquest tema es donaran per sabudes d'altres cursos. Ens limitarem, doncs, a un o dos exemples tipus que ens serviran per introduïr els conceptes i avançar ràpids en vers la classificació i les qüestions noves.

3.2.1. Primer exemple de grup continu: $SO(n)$. En el cas d'$SO(2)$, és el grup de les rotacions del pla:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad R(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tenim que $R(\varphi)$ és una matriu ortogonal de determinant 1:

$$\boxed{R(\varphi)R^T(\varphi) = \mathbb{I}, \qquad \det R(\varphi) = 1.}$$

Es tracta com veiem (en el cas d'$SO(2)$), d'un grup uniparamètric. En el cas d'$SO(3)$ tenim dos paràmetres (els dos angles d'Euler, per exemple), mentre que en el cas general d'$SO(n)$ apareixen $n-1$ paràmetres (angles d'Euler generalitzats).

Aquestes matrius ja constitueixen, per elles mateixes, una representació del grup ortogonal abstracte $SO(2)$. La tal representació, a $\mathbb{R}$ és irreduïble, però no a $\mathbb{C}$, on podem diagonalitzar les matrius amb el senzill canvi de variables $x \pm iy$. En efecte:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' + iy' \\ x' - iy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix}, \qquad R(\varphi)R(\varphi') = R(\varphi + \varphi').}$$

Es tracta d'un grup abelià.

3.2.1.1. *Representacions univaluades irreduïbles.* S'obtenen al triar un valor, $m \in \mathbb{Z}$, a l'exponent:

$$\boxed{D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi}, \qquad D^{(m)}(\varphi + 2\pi) = D^{(m)}(\varphi),}$$

amb el que són univaluades.

3.2.1.2. *Representacions spinorials.* Neixen del fet important, a la física quàntica, de que la funció d'ona, $|\psi>$, *no* és una magnitud amb sentit físic directe i *no cal* que sigui univaluada en fer un gir a l'espai, $\varphi \to \varphi + 2\pi$. Si que ho ha de ser, en canvi, el *producte escalar* (o la *norma*) $< \psi_1 | \psi_2 >$, d'on en aquest cas podem admetre representacions spinorials, que corresponen a *m semienter*. En resum,

$$\boxed{m \in \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}.}$$

Tenim, en tots aquests casos, que

$$\boxed{D^{(m)} \otimes D^{(m')} = D^{(m+m')}.}$$

3.2.1.3. *Generadors infinitesimals.* Engendren l'àlgebra de Lie del grup, d'acord amb el que ja hem vist.

(1) En el cas d'$SO(2)$ en tenim només un, de generador infinitesimal. S'obté expandint en sèrie de Taylor la matriu d'$R(\varphi)$ en torn a $\varphi = 0$:

$$R(\varphi) = \mathbb{I} - i\varphi\mathbb{X} + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad i\mathbb{X} = \left.\frac{dR(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hom veu d'immediat que $\mathbb{X}$ és hermítica, doncs:

$$\mathbb{I} = R(\varphi)R^\dagger(\varphi) = \mathbb{I} + i\varphi(\mathbb{X} - \mathbb{X}^\dagger) + \mathcal{O}(\varphi^2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{X}^\dagger = \mathbb{X}.$$

Inversament, la reconstrucció del grup a partir de la seva àlgebra es fa així (completar-ne els detalls, com a *exercici*):

$$\exp(-i\varphi\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-i\varphi\mathbb{X})^k = \cdots = (\cos\varphi)\,\mathbb{I} - i(\sin\varphi)\,\mathbb{X} = R(\varphi),$$

s'obté, efectivament, la matriu de gir del grup.

(2) En el cas d'$SO(3)$ es procedeix de manera semblant. Per exemple, pel cas del tercer generador infinitesimal, que correspon al gir

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenim ara

$$i\mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i de manera semblant pel demés. Per a un gir d'eix $\vec{n}$:

$$R_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-i\,\vec{n}\cdot\vec{\mathbb{X}}\,\varphi},$$

i els generadors infinitesimals satisfan l'àlgebra de Lie (d'$SO(3)$):

$$\boxed{[\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbb{X}_k\,.}$$

Exercici. Completar tot el que manca en aquests càlculs.

3.2.1.4. *Representacions irreduïbles de l'àlgebra de Lie.* És important observar que per tal d'obtenir les representacions irreduïbles inequivalents en el grup es pot procedir de manera avantatjosa treballant a l'àlgebra de Lie del grup, buscant directament matrius irreduïbles que satisfan les relacions de commutació de la corresponent àlgebra.

Ens limitarem (per completesa del tema) a escriure'n el resultat pel cas d'$SO(3)$, doncs això es arxi-conegut:

- $< jm'|\mathbb{X}_3|jm >= m\,\delta_{mm'}\,,$
  $< jm'|\mathbb{X}_\pm|jm >= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}\,\delta_{m\pm1,m'}\,.$
- Els caràcters són: vegem-ho per $\mathbb{X}_3$, en la representació (j, m) amb $2j + 1$ components

  $$\mathbb{X}_3 = \text{ diag } (j, j-1, \ldots, 0, \ldots, -j+1, -j),$$
  $$R_3(\varphi) = e^{-i\varphi\mathbb{X}_3} = \text{ diag } \left(e^{-ij\varphi}, e^{-i(j-1)\varphi}, \ldots, e^{ij\varphi}\right),$$

  i d'aquí (completar-ne els detalls, com a *exercici*)

  $$\chi^{(j)}(\varphi) = \cdots = \frac{\sin((j+1/2)\varphi)}{\sin(\varphi/2)}, \qquad \langle\chi^{(j)}|\chi^{(j')}\rangle = \cdots = \delta^{jj'}.$$
- Quant a la descomposició en representacions irreduïbles del producte de representacions, tenim la sèrie de Clebsh-Gordan del grup ortogonal:

  $$\boxed{D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)},}$$

  i respecte dels caràcters:

  $$\boxed{\chi^{(j_1)}(\varphi)\chi^{(j_2)}(\varphi) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi^{(j)}(\varphi).}$$

3.2.2. Operadors tensorials. Teorema de Wigner-Eckart. Un operador tensorial irreduïble, T^j_m, es transforma sota rotacions com

$$\boxed{U(R)T^j_m U(R)^{-1} = D^j_{m'm}(R)T^j_{m'}.}$$

Per altra banda, el producte (tensorial) $T^J_M|jm>$ es transforma d'acord amb la representació $D^{(J)} \otimes D^{(j)}$, e.g.

$$U(R)T^J_M|jm> = D^J_{M'M}(R)D^j_{m'm}(R)T^J_{M'}|jm'> .$$

I fent ara servir l'expansió amb coeficients de Clebsch-Gordan (sobreentesa la suma sobre índexs repetits)

$$|j'm'> = C(Jjj'; Mmm')T^J_M|jm>,$$

després d'alguns càlculs (que es deixen com a *exercici*) s'arriba a

$$\boxed{< j'm'|T^J_M|jm> = C(Jjj'; Mmm') < j'||T^J||j>,}$$

on els darrers factors reben el nom d'elements de matriu reduïts, en *no* dependre d'm i només de la representació (índexs j's), d'aquí que s'escriguin d'aquesta forma característica.

La conclusió és ben important: una *factorització* de tota la dependència en m's, en termes dels coeficients de Clebsh-Gordan. Aquest és el contingut del teorema de Wigner-Eckart.

3.3. Classificació de les àlgebres de Lie simples

La classificació d'un grup de Lie es fa a través de l'àlgebra de Lie corresponent. El primer pas consisteix, és clar, en fer la descomposició del grup en termes de grups simples i la classificació pròpiament dita es fa, aleshores, de les àlgebres dels grups de Lie simples. Aquesta temàtica sí que la podem considerar matèria pròpia del Curs. Malauradament però, degut a les limitacions de temps, tindrem que ser altre cop bastant concisos. Per a ulteriors detalls i l'aclariment de les moltes questions que quedaran pendents, s'haurà de fer ús de la bibliografia donada al final sobre teoria de grups.

De fet el treball detallat que es suposa que ha fet el lector per al cas de $SO(3)$ i $SU(2)$ és extremadament útil per a fer la classificació general dels grups de Lie. Els mètodes i idees no s'aparten en cap cas dels que es fan servir en aquests exemples bàsics: ús dels operadors d'augment i disminució del pes, per tal d'arribar a l'estat de pes màxim, $|jj>$ (en el llenguatge de Cartan), ús de la forma de Killing i de la representació adjunta, etc.

- Escriurem el producte de l'àlgebra de Lie, L, com:

$$\boxed{[T_\alpha, T_\beta] = i f^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma,}$$

recordant que satisfà la identitat de Jacobi. Cal tenir ben present que, si bé les constants d'estructura determinen l'àlgebra de Lie, una mateixa àlgebra pot tenir 'jocs' de constants d'estructura diferents. Això es veu ja en el cas d'$SO(3)$ (o $SU(2)$):

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad \text{o altrament} \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \; [J_+, J_-] = 2J_3.$$

- La representació adjunta $\mathcal{A}$ és:

$$\begin{array}{rcl} S_\mathcal{A} : L & \longrightarrow & L \\ T & \mapsto & [S, T], \end{array} \qquad D_\mathcal{A}(T_\alpha)^\gamma_\beta = i f^\gamma_{\alpha\beta};$$

i la forma de Killing:

$$\boxed{(A, B) \equiv \mathrm{Tr}\,(D_\mathcal{A}(A) D_\mathcal{A}(B)) \equiv \mathrm{Tr}_\mathcal{A}(AB).}$$

- Aplicada als generadors de l'àlgebra de Lie, ens dóna la mètrica de Cartan:

$$\boxed{g_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}_\mathcal{A}(T_\alpha T_\beta) = -f^\delta_{\alpha\gamma} f^\gamma_{\beta\delta},}$$

i baixant l'índex,

$$f_{\alpha\beta\gamma} \equiv f^\delta_{\alpha\beta} g_{\delta\gamma},$$

obtenim una quantitat totalment antisimètrica, com es veu fàcilment (*exercici*) del fet que

$$\mathrm{Tr}_\mathcal{A}([[T_\alpha, T_\beta], T_\gamma]) = i f^\delta_{\alpha\beta} \mathrm{Tr}_\mathcal{A}(T_\delta T_\gamma) = i f_{\alpha\beta\gamma},$$

juntament amb la identitat de Jacobi.

3.3.1. El resultat final de la classificació. Els mètodes emprats son deguts fonamentalment a Cartan, Weyl i Dynkin. Avançant-nos al resultat de tot l'estudi, direm ja que els grups simples que surten al final de la classificació són:

- Quatre sèries infinites d'àlgebres de Lie regulars: les dels grups

$$\boxed{SU(n+1), \quad SO(2n+1), \quad Sp(2n), \quad SO(2n),}$$

en el cas de grups compactes, amb

$$SU(p,q), \quad SL(n, \mathbb{R}),$$

substituint els dos primers en el cas no compacte.

- Cinc àlgebres de Lie excepcionals: les dels grups

$$\boxed{G_2, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8.}$$

Gairebé tots ells han estat implicats de manera important en la formulació de diverses teories de la Física: a part de grups tan fonamentals com $SO(3)$ i $SU(2)$ (grup d'automorfismes dels quaternions), tenim G_2 (grup d'automorfismes dels octonions), $Sp(2n)$ el grup simplèctic, que és fonamental en la mecànica hamiltoniana, E_6 usat com a grup de gran unificació (GUT) a física de partícules, o l'E_8, que s'ha fet servir en teories de cordes.

Procedirem ara d'una manera més sistemàtica, però les limitacions del temps que podem dedicar a cada capítol no ens permetran arribar al final d'aquest interessantíssim estudi. Rao per la qual, curant-nos en salud, n'hem donat ja el resultat final.

3.3.2. Àlgebres simples i semisimples.

3.3.2.1. *Àlgebra de Lie simple.* Ho és la que no conté cap ideal propi.

Recordem que un ideal (per l'esquerra), I, en un anell, A, és tot subgrup $I \subset A$ tal que $\forall\, a \in A, \forall\, x \in I$ és $ax \in I$, en altres paraules,

$$AI \subset I.$$

- L'ideal és propi si $I \neq \{0\}$ i $I \neq A$.
- L'ideal és bilàter si $AI \subset I, IA \subset I$ (o $AI = IA$ si A és unitari).
- L'ideal és abelià si $xy = yx,\ \forall\, x, y \in I$.

El concepte d'*ideal* és el que en teoria de grups correspon al de *subgrup*, mentre que el concepte d'*ideal bilàter* és el que en grups correspon al de *subgrup normal*. Això és tot el que direm ara, pel que fa a les definicions generals.

Com que el producte de l'àlgebra de Lie és el parèntesi de Lie, un ideal de L satisfà:

$$\boxed{[I, L] \subset I.}$$

Un ideal abelià és aquell en que

$$[I, I] = 0.$$

3.3.2.2. *Àlgebra de Lie semisimple.* Ho és la que no conté cap ideal abelià.

3.3.2.3. *Proposicions.*

(1) Els tres enunciats següents són equivalents:
   (a) La mètrica de Cartan g és no singular ($\det g \neq 0$).
   (b) L'àlgebra de Lie L és semisimple.
   (c) La forma de Killing K és no degenerada.

(2) Si L conté un ideal, I, aleshores hom pot escriure:

$$\boxed{L = I \oplus P,}$$

éssent P el complement ortogonal de I a l'àlgebra respecte de la forma de Killing.

(3) Tota àlgebra de Lie L semisimple es pot escriure com una suma directa d'àlgebres de Lie simples.

(4) Tota àlgebra de Lie real L amb mètrica de Cartan $g > 0$ és compacta i, re-escalant la base: $g_{\alpha\beta} \mapsto \delta_{\alpha\beta}$.

Demostració. Veure-les en un llibre d'àlgebres de Lie (exercici).

3.3.3. Bases de Cartan de l'àlgebra de Lie.

3.3.3.1. *Subàlgebra de Cartan.* La subàlgebra de Cartan de l'àlgebra de Lie,

$$\boxed{\{H_1, \ldots, H_r\}, \qquad r = \text{ rang,}}$$

està formada per un conjunt maximal de generadors que commuten amb tots els de l'àlgebra. Per exemple:

- A $SU(2)$ i $SO(3)$ és $\{J_3 = \frac{1}{2} d(1, -1)\}$ i el rang val 1. (La $d(1, -1)$ vol dir aquí "matriu diagonal amb elements de la diagonal: $1, -1$".)
- A $SU(3)$ i $SO(4)$ és $\{T_3 = \frac{1}{2} d(1, -1, 0), T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} d(1, 1, -2)\}$ i el rang val 2.
- A $SU(N)$ el rang val $N - 1$ i els generadors corresponents són també les matrius diagonals de traça nula i norma $1/2$.

3.3.3.2. *Pesos.* Els valors propis simultànis dels H_i reben el nom de pesos de l'àlgebra i es fan servir per etiquetar els estats de totes les representacions. En efecte, per combinació lineal de la resta dels generadors, $\{E_\alpha\}$, podem aconseguir en definitiva que:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r,$$
$$[H_i, E_\alpha] \propto E_\alpha,$$

cosa que es pot fer de manera senzilla diagonalitzant l'acció adjunta dels H_i's (veure-ho, com a *exercici*).

La cerca dels valors propis es fa de la manera usual, com a arrels de l'equació secular

$$\det(C_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) = 0, \qquad C_{\alpha\beta} = i f_{j\alpha\beta}, \ j = 1, \ldots, r,$$

fent un càlcul separat per a cada valor fix de j i repetint tot el procediment r vegades.

3.3.3.3. *Teorema de Cartan.* El resultat del procés és que el valor propi 0 apareix amb multiplicitat r (evidentment), éssent la resta de valors propis, en nombre de $d-r$ (d és la dimensió de l'àlgebra de Lie L), no nuls i no degenerats.

Demostració. Consultar-la en un llibre de text.

En termes d'aquesta base pròpia, $\{E_\alpha\}$, tenim doncs que

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad i = 1, \ldots, r,$$

la qual cosa permet d'agrupar els valors propis en famílies corresponents a cada valor d'α:

$$\boxed{\alpha = \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_r), (\beta_1, \ldots, \beta_r), \overset{d-r}{\ldots}, (\ \ )\big)\,,}$$

colecció de totes les arrels de L.

Els $\{E_\alpha\}$ reben el nom d'operadors de salt o pas [*step operators*] o també el de vectors arrels.

3.3.4. Propietats dels vectors arrels. L'etapa que ve ara és, naturalment, veure que fer amb els parèntesis $[E_\alpha, E_\beta]$. Es pot demostrar que aquests són sempre també proporcionals als vectors arrels, d'índex $\alpha+\beta$, a menys que $\alpha+\beta = 0$ o bé que $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. En resum:

- Si $\alpha+\beta = 0$: $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \lambda_i H_i$
  (on queda assumit que si α és una arrel, $-\alpha$ també ho és).
- Si $\alpha+\beta \neq 0$: $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$,
  on $N_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha+\beta$ *no* és una arrel.

Si H_i és hermític (p.ex., si el grup és compacte), aleshores:

$$E_{-\alpha} = E_\alpha^\dagger.$$

Hom pot demostrar que

$$(H_i, E_\alpha) = 0, \quad (E_\alpha, E_\beta) = 0, \quad \text{si} \quad \alpha+\beta \neq 0.$$

I en una àlgebra de Lie simple amb mètrica de Cartan no degenerada es pot posar sempre:

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1, \qquad (H_i, H_j) = \delta_{ij}, \qquad \lambda_j = \alpha_j, \ \forall\, j.$$

Exercici. Demostrar tot el que acabem de dir (pot-ser caldrà l'ajut d'un llibre de text).

3.3.5. Bases de Cartan-Weyl. Recullen tot el que hem dit fins ara:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 & (H_i, H_j) &= \delta_{ij}, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, & (H_i, E_\alpha) &= 0, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \alpha_i H_i, & (E_\alpha, E_{-\alpha}) &= 1, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad \alpha+\beta \neq 0, & (E_\alpha, E_\beta) &= 0, \quad \alpha+\beta \neq 0. \end{aligned}$$

3.3.5.1. *Vectors arrels.* Les arrels, i els propis operadors, s'acostumen a tractar com a vectors, amb el seu producte:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i, \qquad \alpha \cdot H = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i H_i.$$

Evidentment, no totes les arrels que puguem considerar són aleshores vectors independents (com a molt ho poden ser r d'elles).

3.3.5.2. *Arrels positives.* Una arrel es diu que és positiva (negativa) sii la seva primera component ho és.

3.3.5.3. *Arrel simple. Base de Chevalley.* Ho és tota arrel positiva que *no* és suma de dues altres arrels positives.

Les arrels simples formen una base natural (dita de Chevalley) del diagrama d'arrels:

- Tota arrel positiva α:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbb{N} \quad \text{(poden ser 0)}.$$

- Tota arrel negativa α:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i, \quad n_i \in -\mathbb{N} \quad \text{(poden ser 0)}.$$

3.3.5.4. *Matriu de Cartan i diagrames de Dynkin.* Tota la informació essencial de l'àlgebra de Lie del grup de Lie queda de fet incorporada a aquests productes escalars de les arrels, que constitueixen la matriu de Cartan:

$$\boxed{K_{ij} = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i^2},}$$

la diagonal de la qual és supèrflua ($2\mathbb{I}$).

Les matrius de Cartan corresponents a $SO(4)$, $SU(3)$, $SO(5)$ i G_2 són:

$$SO(4):\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad SU(3):\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$SO(5):\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G_2:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Els diagrames de Dynkin són una manera gràfica de representar la matriu de Cartan, en termes dels valors de fora de la diagonal. Les r arrels simples de l'àlgebra es representen mitjançant petits cercles que s'uneixen per cap, un, dos o tres segments paral.les. El nombre exacte d'ells, entre les arrels i i j, és de $n_{ij} = K_{ij}K_{ji}$ (on els índexs aquí *no* van sumats), amb una fletxa direccional apuntant cap a l'arrel més petita (quan aquestes són diferents). Els diagrames corresponents als exemples anteriors estan representats a la Fig. 3.3.

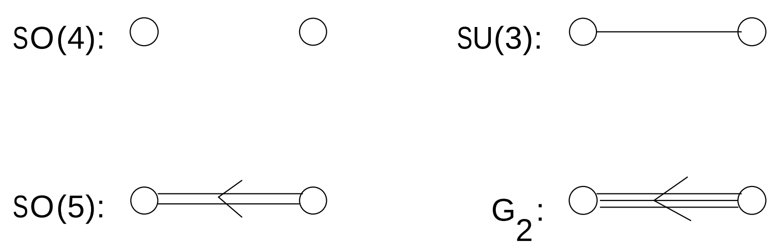


FIGURA 3.3. Els diagrames de Dynkin corresponents a les àlgebres de Lie de rang $r = 2$.

3.3.5.5. *Exercici i treball complementari.* Completar l'estudi d'aquests conceptes en un llibre de teoria de grups i d'àlgebres de Lie (veure els suggeriments al final, apartat de treballs i bibliografia), obtenint en particular la quantització de les arrels, les matrius de Cartan i els diagrames de Dynkin corresponents als diversos grups de les sèries regulars i de les àlgebres excepcionals, que desemboquen en la classificació final ja apuntada. En realitat aquest estudi es proposa en un dels treballs específics al final del present Curs, on es dóna també una bibliografia complementària de més abast.

CAPíTOL 4

FORMES DIFERENCIABLES. CÀLCUL EXTERIOR

Donada M, una varietat diferenciable C^k de dimensió n, treballarem aquí als espais de camps de k-formes diferenciables $\Lambda^k(M)$ on, com se sap, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ens limitarem a complementar els coneixements que ja es tenen de l'àlgebra multilineal [**27**], tot portant-los a l'àmbit de la geometria diferencial. En repassarem primer alguns conceptes bàsics. L'espai vectorial abstracte, E, del qual en parlarem ara, serà en el futur l'espai tangent en un punt p de la varietat diferenciable M: $E \equiv T_p(M)$.

4.1. Àlgebra tensorial. Àlgebra simètrica. Àlgebra exterior

Sigui E un espai vectorial de dimensió finita, n, sobre un cos arbitrari K. Sigui $b = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E i $b^* = \{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ la seva base dual, $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$. L'espai vectorial (de dimensió n^{p+q}) de tensors (p, q) —això és, covariants d'ordre p i contravariants d'ordre q (o $p-$covariants i $q-$contravariants)— és l'engendrat (mitjançant combinacions lineals) per la base:

$$T^q_p(E) = \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_p} \rangle^{c.l.}_{i_1,\ldots,i_q,j_1,\ldots,j_p=1,\ldots,n}.$$

L'àlgebra tensorial de E és la suma directa dels espais $T^q_p(E)$, dotada amb el producte tensorial $\otimes$ (que no és ni commutatiu ni anticommutatiu):

$$\mathcal{T}(E) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T^q_p(E).$$

L'àlgebra tensorial covariant, $\mathcal{T}_c(E)$, subàlgebra de l'àlgebra tensorial, s'obté en restringir-se als tensors covariants de qualsevol ordre:

$$\mathcal{T}_c(E) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p(E), \quad T_p(E) = \langle \omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_p} \rangle^{c.l.}_{i_1,\ldots,i_p=1,\ldots,n}.$$

L'**àlgebra tensorial contravariant**, $\mathcal{T}^c(E)$, s'obté de manera semblant:

$$\mathcal{T}^c(E) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(E), \quad T^p(E) = \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \rangle^{c.l.}_{i_1,\ldots,i_p=1,\ldots,n}.$$

Totes elles són àlgebres de dimensió infinita.

Partint de qualsevol d'aquestes darreres àlgebres s'obtenen l'àlgebra simètrica i l'àlgebra exterior, fent quocients per ideals bilàters adequats. Observem que l'àlgebra tensorial és una àlgebra unitària, on l'element neutre pel producte no és altre que l'element 1 del cos K. [1] Així, per exemple, fent el quocient de l'àlgebra tensorial contravariant per l'ideal bilàter engendrat per

$$I = \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \rangle^{id.bil.eng.}_{i,j=1,\ldots,n},$$

s'obté l'**àlgebra simètrica** d'ordre n, que és isomorfa a l'**àlgebra de polinomis en n indeterminades** sobre el cos K:

$$\mathcal{T}^c(E)/I = \mathcal{S}(E) \cong K[x_1, \ldots, x_n].$$

En efecte, en aquest quocient el producte tensorial esdevé commutatiu

$$\overline{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i} = 0, \quad \overline{e_i}\overline{\otimes}\overline{e_j} = \overline{e_j}\overline{\otimes}\overline{e_i}.$$

La mateixa àlgebra simètrica, sense cap diferència, s'obté partint de l'àlgebra tensorial covariant. L'àlgebra simètrica és també de dimensió infinita.

Considerem ara doncs l'àlgebra tensorial covariant i fem el quocient per l'ideal bilàter engendrat per la simetrització de productes tensorials de parelles de la base

$$J = \langle \omega_i \otimes \omega_j + \omega_j \otimes \omega_i \rangle^{id.bil.eng.}_{i,j=1,\ldots,n}.$$

[1]Recordem la definició d'ideal I d'una àlgebra A (com a tensor de tipus (0,0), és clar). $I \subset A$ n'es un ideal per l'esquerra sii: (1) $\forall x, y \in I$, hom té que $x - y \in I$; (2) $\forall x \in I, a \in A$, hom té que $ax \in I$. Aquestes condicions es poden escriure així: $I - I \subset I$, $AI \subset I$. De manera semblant es defineix el concepte d'ideal per la dreta (la segona condició és: $IA \subset I$). Un ideal bilàter és aquell que satisfà (1) i (2) $\forall x \in I, a, b \in A$ hom té que $ax \in I$ i $xa \in I$ (d'altra manera: $AI \subset I, IA \subset I$, o bé $AI = IA$. quan A és unitari, com en els casos que considerarem). Un ideal I és principal sii existeix un element $x \in I$ tal que $Ax = xA = I$. Recordem que a l'anell $\mathbb{Z}$ i també a $K[x]$ tots els seus ideals són principals. El concepte d'ideal bilàter d'una àlgebra estén el de subgrup normal d'un grup. Els teoremes de pas al quocient i de desomposició en suma directa que s'obtenen en els dos cassos són els mateixos. En particular, el quocient d'una àlgebra per un ideal bilàter de la mateixa és una altra àlgebra i la primera és suma directa de l'àlgebra quocient i de l'ideal en questió.[**27**]

S'obté l'àlgebra exterior covariant:

$$\mathcal{T}_c(E)/J = \Lambda_c(E).$$

En el quocient, el producte tensorial esdevé anticommutatiu i rep el nom de producte exterior, $\overline{\otimes} \equiv \wedge$:

$$\overline{\omega^i \otimes \omega^j + \omega^j \otimes \omega^i} = 0, \quad \overline{\omega^i}\overline{\otimes}\overline{\omega^j} = -\overline{\omega^j}\overline{\otimes}\overline{\omega^i}.$$

Partint de l'àlgebra tensorial contravariant s'obté l'àlgebra exterior contravariant. L'àlgebra exterior d'E té dimensió $2^{dim\, E}$ i la seva estructura, així com les propietats del producte exterior, seran estudiades més avall. Cal finalment fer notar que aquesta construcció d'àlgebres per pas al quocient per un ideal és un procés universal comunment emprat (recordar, p.ex., com a *exercici* la construcció de l'àlgebra de Clifford [**27**].)

4.2. Producte tensorial d'espais vectorials. Factorització i entanglement

Donats dos espais vectorials, E i F, de dimensions n i m sobre el mateix cos K, amb bases respectives $\{e_i\}$ i $\{f_\alpha\}$, el producte tensorial $E \otimes F$ és l'envoltura lineal del conjunt de productes $u \otimes v$, amb $u \in E$ i $v \in F$:

$$E \otimes F = \langle u \otimes v \rangle^{c.l.}_{u \in E, v \in F} = \langle e_i \otimes f_\alpha \rangle^{c.l.}_{i=1,\ldots n, \alpha=1,\ldots,m}.$$

Hom té que $\dim E \otimes F = mn$, éssent-ne una base: $\{e_i \otimes f_\alpha\}_{i=1,\ldots n, \alpha=1,\ldots,m}$. Resulta fàcil d'apreciar que una expressió convenient d'un element $w \in E \otimes F$ en aquesta base,

$$w = w^{i\alpha} e_i \otimes f_\alpha,$$

ve donada per la matriu[2]

$$w = \begin{pmatrix} w^{11} & w^{12} & \cdots & w^{1m} \\ w^{21} & w^{22} & \cdots & w^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{n1} & w^{n2} & \cdots & w^{nm} \end{pmatrix}.$$

És interessant notar a més que al producte $u \otimes v \in E \otimes F$ li correspon la matriu (que s'obté fent us del producte ordinari de matrius, fila per

[2]Aquest producte de vectors per juxtaposició no és altra cosa que el producte diàdic, comuntment emprat en el llenguatge tensorial de la física clàssica.

columna)

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \, v^2 \, \cdots \, v^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1v^1 & u^1v^2 & \cdots & u^1v^m \\ u^2v^1 & u^2v^2 & \cdots & u^2v^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^nv^1 & u^nv^2 & \cdots & u^nv^m \end{pmatrix}.$$

Ha de quedar molt clar que el producte tensorial $E \otimes F$ *no* és igual al conjunt de tots els productes possibles d'un vector de E per un de F,[3] doncs conté molts més elements: totes les *combinacions lineals* que se'n poden formar.[4] En aquest context, és d'enorme importancia la qüestió següent: *donat* $w \in E \otimes F$, *existeixen* $u \in E$ *i* $v \in F$ *tals que* $w = u \otimes v$*?* Matricialment: donada una matriu $n \times m$ qualsevol, existeixen o no dos vectors tals que en multiplicar-los, com acabem de veure, obtenim aquesta matriu? Si la resposta és *sí*, aleshores w es pot *factoritzar* i, en el llenguatge de la teoria de la informació quàntica, w correspon a un estat *non-entangled*. Quan la resposta és *no*, ens trobem devant d'un element *no factoritzable*, associat doncs a un estat *entangled*. Salvant les distàncies, aquesta és en essència la formulació matemàtica del concepte d'entanglement d'estats quàntics (d'un espai de Hilbert, topològic i de dimensió infinita, això és clar). Si l'espai de Hilbert és *separable* (admet una base numerable i densa) aleshores l'expressió matricial d'aquesta propietat en un cas físic autèntic és exactament la mateixa que acabem de donar, amb l'única diferència que les matrius i vectors corresponents tenen un nombre infinit numerable de components.

De la mateixa manera es construeix el producte tensorial d'un nombre finit arbitrari d'espais vectorials sobre un mateix cos:

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_r.$$

Hom té que: $\dim\,(E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_r) = n_1 n_2 \cdots n_r$. [**27**]

4.3. Producte exterior

Reformulem-lo ara ja en el context de l'àlgebra exterior:

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \Lambda^k(M) \times \Lambda^h(M) & \longrightarrow & \Lambda^{k+h}(M) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

[3]Un error força comú entre els qui no dominen el tema, que té segurament l'origen en la manera de denotar el producte tensorial de dos e.v.

[4]No pot ser d'altra forma, ja que $E \otimes F$ ha de tenir l'estructura d'e.v.

Per a les 1-formes, $\{\omega^i\}$, de la base dual d'una certa base de l'espai tangent, tenim

$$\omega^i \wedge \omega^j = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i = -\omega^j \wedge \omega^i, \quad j = 1, \dots, n.$$

L'àlgebra exterior $\Lambda(M) = \oplus_{k=0}^n \Lambda^k(M)$ és associativa i anticommutativa

$$\boxed{\alpha \wedge \beta = (-1)^{kh} \beta \wedge \alpha,}$$

on k i h són els ordres de les formes α i β, respectivament.

Si $\alpha^i, i = 1, \dots, k$, són ara 1-formes arbitràries:[5]

$$\boxed{\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = \epsilon^{1 \dots k}_{i_1 \dots i_k} \alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_k},}$$

on ϵ és el tensor totalment antisimètric, de components ± 1,

$$\boxed{\epsilon^{1 \dots k}_{i_1 \dots i_k} = \text{signe} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} 1,}$$

i el signe és el de la permutació.

Una base local de camps de formes de $\Lambda^k(M)$ ve donada per

$$\boxed{\left\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n},}$$

on recordem que les ω^{i_j} són les 1-formes de la base dual tangent, que en una carta local $(U_x; x^1, \dots, x^n)$ de la varietat venen donades per $\omega^{i_j} = dx^{i_j}$.

L'expressió del producte exterior de dues formes d'ordres arbitraris és[6]

$$(\alpha \wedge \beta)_{i_1 \dots i_{k+h}} = \frac{1}{k!\, h!} \epsilon^{j_1 \dots j_k l_1 \dots l_h}_{i_1 \dots i_{k+h}} \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta_{l_1 \dots l_h}.$$

4.4. Àlgebres exteriors covariant i contravariant

De la mateixa manera que es defineix l'àlgebra exterior ordinària (covariant),

$$\Lambda(M_n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(M_n)$$

[5]Compte amb la normalització emprada pels diversos autors en aquesta definició: sovint alguns divideixen per $k!$.[**27**]

[6]Aquesta fòrmula pot quedar també afectada pel que hem dit abans sobre la normalització pels factorials.[**27**]

sobre la varietat n-dimensional M_n, es pot construir (traslladant, com sempre, el concept corresponent que tenim de l'àlgebra multilineal) l'àlgebra exterior contravariant,

$$\boxed{\Lambda_c(M_n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda_k(M_n).}$$

La base de $\Lambda_k(M_n)$ és

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} .$$

De totes formes, en lloc de continuar amb aquest procés d'una manera abstracta, en teoria de varietats i, més en particular, dins de la teoria de la integració en varietats que tractarem en el següent capítol, el mètode més important per establir la dualitat entre camps de k-formes de l'àlgebra exterior $\Lambda(M_n)$ i camps de 'k-vectors' de l'àlgebra exterior contravariant $\Lambda_c(M_n)$ és mitjançant la *dualitat de Hodge*, que s'estableix un cop definida la forma de volum a la varietat. Per això, la definició d'aquesta dualitat no es veurà fins més endavant, al final del present capítol.

4.5. Forma de volum. Densitats tensorials

Qualsevol camp de n-formes no nul de M ens dóna en principi una forma de volum de la varietat. N'hi pot haver vàries, i a vegades més d'una d'interessant, des del punt de vista de la Física. Per exemple, en el cas ja esmentat del flux d'un fluid perfecte, tridimensional, a l'espai euclidià hi ha tres formes importants que per integració sobre la varietat ens donen formes de volum: el volum en sí, la massa i la vorticitat.

Generalment, la forma de volum es concreta lligant-la a una determinada base local. Així, en la carta local $(U_x; x^1, \ldots, x^n)$ de la varietat, prendrem com a forma de volum ordinària la següent:

$$\boxed{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.}$$

Qualsevol altra forma de volum serà proporcional a aquesta (recordem que $\Lambda^n(M_n)$ té dimensió 1):

$$\omega_{i_1 \ldots i_n} = \omega \, \epsilon_{i_1 \ldots i_n}$$

on ω és un número, però *no* és un escalar, doncs el seu valor depèn de la base de coordenades locals triada: es tracta d'una densitat escalar. Canvia amb el jacobià, J, e.g., en una altra base:

$$\bar{\omega} = J \; \omega,$$

que és la transformació d'una densitat escalar de pes 1 (el pes és, naturalment, l'exponent de J).

Exemples.

(1) Un tensor ordinari és una densitat tensorial de pes 0.

(2) En una varietat diferenciable M, un tensor del tipus $T^{ij}_{i_1\dots i_n} = T^{ij}_{[i_1\dots i_n]}$ (totalment antisimètric en els n índexs $i_1 \dots i_n$), per contracció amb dues 1-formes, α_i i β_j, dona:

$$t_{i_1\dots i_n} = T^{ij}_{i_1\dots i_n}\alpha_i\beta_j,$$

que és una forma de volum, dins d'una varietat n-dimensional, M_n, i per tant proporcional al tensor ϵ, d'altra manera:

$$T^{ij}_{i_1\dots i_n} = s^{ij}\epsilon_{i_1\dots i_n},$$

d'on s^{ij} resulta ser doncs una densitat tensorial $\binom{2}{0}$, de pes 1. En efecte, es transforma com

$$\bar{s}^{i'j'} = JC^{i'}_i C^{j'}_j s^{ij}.$$

4.5.1. Determinant. Només recordar que el determinant es defineix de manera molt simple mitjançant el tensor ϵ:

$$\boxed{\det A = \epsilon_{i_1\dots i_n}A^{1i_1}\cdots A^{ni_n} = \frac{1}{n!}\epsilon_{j_1\dots j_n}\epsilon_{i_1\dots i_n}A^{j_1i_1}\cdots A^{j_ni_n}.}$$

4.5.2. Volum a $\mathbb{R}^3$. El volum determinat per tres vectors, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, de $\mathbb{R}^3$ ve donat per:

$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \epsilon_{ijk}a^i b^j c^k.$$

Serà, evidentment, nul si els tres vectors estàn sobre un mateix pla. La generalització a $\mathbb{R}^n$ és senzilla (fer-la, com a *exercici*).

4.5.3. Element de volum mètric. Donat g^{ij} tensor mètric (e.g, un camp tensorial covariant d'ordre dos simètric i definit no negatiu) sobre la varietat M_n, sota un canvi de coordenades locals es transforma, a cada carta, com: $\bar{g} = C^T gC$, d'on

$$\det \bar{g} = (\det g)(\det C)^2$$

i dient-li (com es fa usualment) $|g| \equiv |\det\, g|$ (el determinant en valor absolut), hom té que

$$\boxed{|\bar{g}|^{1/2} = |\, g|^{1/2}J,}$$

d'on resulta que $|g|^{1/2}$ és una *densitat escalar típica* de la varietat.

En una base ortonormal local, g^{ij} es pot diagonalitzar sempre, éssent els nombres de valor positius i nuls de la diagonal característics del tensor mètric (no depenen del canvi de base emprat per diagonalitzar-lo). I en un canvi de base donat per una matriu del grup ortogonal, hom té que: $\det C = \pm 1$.

Exercici. Recordar aquí la classificació de formes quadràtiques (mètriques, simplèctiques, hermítiques), de l'àlgebra bilineal (real i complexa) i transportar els resultats al cas de tensors dels tipus corresponents sobre una varietat, particularitzant després a un tensor mètric. Distingir en cada situació entre la classificació purament lineal (canvi de base arbitrari) i la que fa ús de canvis de base donats per matrius ortogonals i unitàries, respectivament (veure-ho, per exemple, a [**27**]).

La dualitat a través de la mètrica es defineix així. El dual de la forma de volum típica, $\omega_{i_1\dots i_n} = |g|^{1/2}\epsilon_{i_1\dots i_n}$, és:

$$\begin{aligned} \omega^{i_1\dots i_n} &= g^{i_1j_1}\cdots g^{i_nj_n}\omega_{j_1\dots j_n} \\ &= |g|^{1/2}\det(g^{ij})\ \epsilon^{i_1\dots i_n} = \frac{\text{signe } g}{|g|^{1/2}}\ \epsilon^{i_1\dots i_n}, \end{aligned}$$

d'on, en particular,

$$\omega_{1\dots n} = \frac{|g|^{1/2}}{g} = \frac{\text{signe } g}{|g|^{1/2}}.$$

El signe del determinant del tensor mètric intervé de manera clau en la determinació de la forma de volum.

4.6. La diferencial exterior

4.6.1. Definició axiomàtica. A l'àlgebra exterior, $\Lambda(M)$, de la varietat diferenciable n-dimensional M, es defineix la diferencial exterior com una aplicació,

$$d : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M),$$

tal que

(1) d és lineal.
(2) $d(\alpha\wedge\beta) = d(\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d(\beta)$,
on k és l'ordre de la forma α.
Es diu aleshores que d és una antiderivació.
(3) $d^2 = 0$, d és nilpotent.
(4) Si f és una 0-forma (funció diferenciable), aleshores df és la diferencial ordinària (en una carta local, $df = \partial_i f\, dx^i$).

Aquests axiomes defineixen d de manera unívoca com

Definició 2:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \\ d\alpha &= d\alpha_{i_1\dots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

I per tant

$$\boxed{d\alpha = (\partial_j \alpha_{i_1 \dots i_k})\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.}$$

En realitat d està definida sobre l'àlgebra dels germens de formes diferenciables $\Box_x^k$.

Exercicis.

(1) Demostrar que, efectivament, aquesta definició última, estesa per linealitat, satisfà totes les condicions anteriors.
(2) Interpretar la condició de nilpotència de la diferencial exterior i esbrinar-ne la seva relació amb les condicions d'integrabilitat i amb possibles singularitats a la varietat.

Exemples.

(1) Donada una 1-forma de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = adx + bdy + cdz$, tenim que

$$d\alpha = (\partial_y c - \partial_z b)dy \wedge dz + (\partial_z a - \partial_x c)dz \wedge dx + (\partial_x b - \partial_y a)dx \wedge dy.$$

En llenguatge vectorial, $\vec{v} = (a, b, c)$, la derivada exterior és el rotacional rot $\vec{v}$.

(2) Donada una 2-forma de $\mathbb{R}^3$: $\alpha = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$, tenim que la diferencial exterior és

$$d\alpha = (\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

En llenguatge vectorial, $\vec{v} = (a, b, c)$, la derivada exterior és en aquest cas la divergència div $\vec{v}$.

(3) L'expresió de la condició de nilpotència de la diferencial exterior ens porta a
   (a) $ddf = 0 \longrightarrow$ rot grad $f = 0$, per f funció diferenciable.
   (b) $dd\alpha = 0 \longrightarrow$ div rot $\alpha = 0$, per α 1-forma.
(4) Altres expressions, de les moltes que es dedueixen en aquest sentit:
   (a) div $(f\vec{v}) =$ (grad f) $\vec{v} + f$ div $\vec{v}$.
   (b) div $(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}\cdot$ rot $\vec{v} - \vec{v}\cdot$ rot $\vec{u}$.

4.6.2. Expressió en cartes locals del *pull back* de formes. Recordem ara l'expressió del *pull back* de formes, f^*, corresponent a l'aplicació diferenciable $f : M_n \to M_n$. Actuant sobre una k-forma

$$\omega = \omega_{j_1 \dots j_k}(y)\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}, \quad j_h = 1, \dots, m,\ h = 1, \dots, k,$$

tenim

$$
\begin{aligned}
f^*\omega &= \omega_{j_1\dots j_k}(f(x))\ dy^{j_1}(x)\wedge\cdots\wedge dy^{j_k}(x)\\
&\equiv (f^*\omega)_{i_1\dots i_k}(x)\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&= \omega_{j_1\dots j_k}(f(x))\frac{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_k})}{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_k})}\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\\
&\qquad i_h=1,\dots,n,\ h=1,\dots,k.
\end{aligned}
$$

On, com havíem ja dit anteriorment, les components de la nova forma en la base local de la varietat M_n s'obtenen per multiplicació amb un menor de la matriu jacobiana de f, en les bases locals corresponents.

4.7. Cohomologia de de Rham

4.7.1. Forma exacta. Una k-forma ω es diu exacta sii existeix una $(k-1)$-forma α tal que:

$$\boxed{\omega = d\alpha.}$$

4.7.2. Forma tancada. Una k-forma ω es diu tancada sii

$$\boxed{d\omega = 0.}$$

Proposició. Tota forma exacta és tancada.

Demostració. Es degut a que d és nilpotent.

La pregunta sobre si la implicació inversa és certa en general, ens porta a la construcció de la cohomologia de de Rham. En realitat tot operador nilpotent dóna lloc a una cohomologia de la manera que veurem ara. A a més és lineal (com en el nostre cas), aleshores la cohomologia ho és d'espais vectorials.

Considerem en aquest cas la diferencial exterior, d, actuant dues vegades:

$$\boxed{\cdots\longrightarrow \Lambda^k M \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1}M \xrightarrow{d_{k+1}} \Lambda^{k+2}M \longrightarrow\cdots}$$

Éssent rigorosos, la primera d ha de portar un subindex, k per distingir-la de la segona, amb subindex $k+1$, pel fet que ambdues aplicacions no són estrictament la mateixa, doncs actúen sobre subespais diferents de $\Lambda(E)$ (encara que "la llei", la correspondència en sí sigui la mateixa). De fet $d_k = d|_{\Lambda^k(E)}$.

La imatge de $\Lambda^k M$ per la primera diferencial,

$$\boxed{d_k(\Lambda^k M)\equiv B^{k+1}M,}$$

està continguda (per la proposició anterior) en el nucli de d_{k+1},

$$\boxed{\mathrm{Ker}_{d_{k+1}} \equiv Z^{k+1}M.}$$

El quocient (que és un grup, i també un espai vectorial en aquest cas)

$$\boxed{H^{k+1}M = Z^{k+1}M \big/ B^{k+1}M,}$$

rep el nom de $(k+1)$-grup (o espai) de cohomologia de de Rham.

La relació d'equivalència en aquest quocient és:

$$\boxed{\omega_1 \sim \omega_2 \iff \exists\, \theta \quad \text{tal que} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\theta.}$$

Més endavant, després de fer la teoria de la integració en varietats, tornarem sobre aquest tema amb molt més detall. Les formes de volum seràn la base de tota la teoria de la integració de Lebesgue en varietats, i el paper de la cohomologia de de Rham serà allí importantíssim, donant lloc a un dels capítols més bells d'aquest Curs (i, fins i tot, de la Física-Matemàtica sencera).

4.8. Operadors sobre formes

4.8.1. Derivada de Lie de formes. A partir de la definició de la derivada de Lie no és difícil veure que, per a una k-forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

la seva derivada de Lie respecte d'un camp vectorial tangent v es pot escriure com

$$\boxed{\mathcal{L}_v \omega = \frac{1}{k!} \left(v^j \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k} + k \omega_{j i_2 \dots i_k} \partial_{i_1} v^j \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.}$$

La derivada de Lie satisfà la regla de Leibniz respecte del producte exterior:

$$\boxed{\mathcal{L}_v(\omega \wedge \theta) = (\mathcal{L}_v \omega) \wedge \theta + \omega \wedge (\mathcal{L}_v \theta).}$$

Exercici. Demostrar les igualtats precedents.

4.8.2. La contracció per un camp vectorial. La contracció d'un o més índexs d'un tensor o producte de tensors és un concepte molt general i ben conegut de l'àlgebra multilineal. Aquí ens referirem al cas més particular de l'operador designat per $i_v \omega$ o bé $v \lrcorner \omega$, que consisteix a fer el producte tensorial del camp vectorial v pel camp de k-formes ω i després contreure l'índex del vector amb el primer de la forma ('per contacte', tal com la notació indica).

Per tant, i_v és una aplicació

$$i_v : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{k-1} M$$

que satisfà

(1) i_v és una aplicació lineal.
(2) i_v és una antiderivació, és a dir, a més

$$\boxed{i_v(\omega \wedge \theta) = i_v(\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge i_v(\theta).}$$

(3) $i_v f = 0$, per a tota funció diferenciable f.
(4) $i_v dx^i = v^i$.
(5) Resulta aleshores que, per a una k-forma arbitrària,

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

hom té que

$$\boxed{i_v \omega = \frac{1}{(k-1)!} v^j \omega_{j i_2 \dots i_k} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.}$$

4.8.3. Propietats de d, i_v i $\mathcal{L}_v$. La diferencial exterior d, la contracció i_v i la derivada de Lie $\mathcal{L}_v$ tenen (entre d'altres) les següents propietats importants:

(1) $i_v^2 = 0$, nilpotència.
(2) $d\, i_v + i_v\, d = \mathcal{L}_v$, d'altra manera, $\{d, i_v\} = \mathcal{L}_v$ ($\{\ \ \}$ és l'anticommutador).
(3) $[\mathcal{L}_u, i_v] = i_{[u,v]}$.
(4) $d\theta(u,v) = \mathcal{L}_u \theta(v) - \theta([u,v])$, per a tota 1-forma θ.
(5) $\mathcal{L}_{[u,v]} = [\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v]$.

Exercici. Demostrar-les.

4.8.4. Operador $*$ de Hodge. En una varietat diferenciable M_n amb una forma de volum ω, l'operador $*$ de Hodge es defineix de la següent manera. Donat un p-vector, $\beta \in \Lambda_p(M_n)$, és a dir

$$\beta = \beta^{i_1 \dots i_p}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

es defineix la forma dual (Hodge) de β com l'única $(n-p)$-forma, ${}^*\beta \in \Lambda^{n-p}(M_n)$, tal que

$$\boxed{\alpha \wedge {}^*\beta = \omega(\alpha|\beta), \quad \forall\, \alpha \in \Lambda^p(M_n).}$$

El producte $(\alpha|\beta)$ es defineix de manera natural com

$$\boxed{(\alpha|\beta) = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p}.}$$

En el cas particular d'un vector $v = v^i e_i$, tenim explícitament:

$$\begin{aligned} {}^*v &= \frac{1}{(n-1)!}\omega_{i_1\dots i_n} v^{i_1}\ dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}|g|^{1/2}\epsilon^{1\dots n}_{i_1\dots i_n} v^{i_1}\ dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n} \\ &= |g|^{1/2}(-1)^{i_j-1}v^{i_j}\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n} \\ &= i_v\omega, \end{aligned}$$

és doncs simplement la contracció de la forma de volum pel vector.
En general, hom té:

$$\boxed{{}^*\beta_{i_{p+1}\dots i_n} = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\dots i_n}\beta^{i_1\dots i_p}.}$$

4.9. Sistemes diferencials exteriors: sistemes de Pfaff

Només podrem donar unes breus nocions d'aquests conceptes. El problema que es planteja aquí és trobar varietats integrals de formes diferenciables. Els més senzills, corresponents a 1-formes, reben el nom de sistemes de Pfaff. També en aquest context hi tenim el teorema de Fröbenius.

4.9.1. Teorema de Fröbenius per a sistemes diferencials. Un sistema de Pfaff:

$$\boxed{\theta^i = 0, \quad i = 1,\dots,r,}$$

(les θ^i son 1-formes diferenciables linealment independents) és completament integrable (i.e., $\exists\, y$ tal que $\theta = dy$) sii

$$d\theta^i\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r = 0, \quad \forall\, i = 1,\dots,r.$$

Demostració. Demostrarem el resultat més general de que una forma, ω, pertany a l'ideal, I, generat per les formes de Pfaff $\{\theta^1,\dots,\theta^r\}$

$$\boxed{\omega\in I\equiv\langle\theta^1,\dots,\theta^r\rangle \iff \omega\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r = 0.}$$

En efecte:

(1) $\omega\in I \Longrightarrow \omega\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r = 0$, és immediat.

(2) Completem les 1-formes del sistema a una base de 1-formes de l'espai dual tangent en U, carta de la varietat M_n: $\{\theta^j\}_{j=1,\dots,n}$ (les r primeres formes són les que ja teniem). Sigui, en aquesta base,

$$\omega = \omega_{i_1,\dots,i_p}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p},$$

tal que

$$\omega\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r = 0.$$

Això vol dir que $\omega_{i_1,\ldots,i_p} = 0$, necessàriament si

$$\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{1, \ldots, r\} = \emptyset$$

i, per tant, queda del tot clar que $\omega \in I$, c.v.d.

4.9.2. Criteri d'integrabilitat. El criteri d'integrabilitat equival doncs a:

$$\boxed{d\theta^i \in I, \quad i = 1, \ldots, r.}$$

Això es tradueix, a la pràctica, en la possibilitat de fer un canvi de coordenades a la varietat, en termes de les $\{y^1, \ldots, y^r\}$ tals que $\theta^i = dy^i$.

CAPíTOL 5

INTEGRACIÓ EN VARIETATS. TEOREMA DE STOKES. COHOMOLOGIA

5.1. Orientabilitat d'una varietat

5.1.1. Orientació. Dos sistemes coordenats locals, $\{x^i\}$ i $\{y^i\}$, vàlids a l'entorn, U_p (homeomorf a $V \subset \mathbb{R}^n$), d'un punt, p, d'una varietat diferenciable, M, es diu que definեixen la mateixa orientació sii el determinant jacobià

$$J = \frac{D(x^i)}{D(y^j)} > 0, \quad \forall\, q \in U_p \ (q = (x^i) = (y^i)).$$

5.1.2. Varietat diferenciable orientable. Una varietat diferenciable M es diu orientable sii té un atles tal que $\forall\,(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$, cartes locals amb $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, és

$$\boxed{\frac{D(\varphi_1^i)}{D(\varphi_2^j)} > 0.}$$

No s'ha de produir doncs cap canvi d'orientació en canviar de carta. Aquesta nomenclatura indica el determinant de la jacobiana del canvi de coordenades locals a la intersecció de les cartes, i és el mateix que posar, com a dalt,

$$\frac{D(x^i)}{D(y^j)}, \qquad \text{o bé} \qquad \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)}.$$

La varietat definida en termes d'aquest atles es diu orientada.

Alternativament, l'orientació també pot ser definida a través de l'espai tangent, T_pM (e.g., el concepte d'orientació en un espai vectorial). Si la varietat M és orientable, una base [*repère, Vierbein, n-Bein*] transportada al llarg d'un camí del fibrat tangent de la varietat M retorna al punt inicial amb la mateixa orientació. Cal recordar aquí la definició d'orientació d'una base en un espai vectorial: el signe del determinant dels vectors, o el que és el mateix, de la n-forma de volum que defineixen. Altre cop ens hem de recolzar en els nostres coneixements previs d'àlgebra lineal [**27**]. I també com sempre, l'única novetat aquí consisteix en tenir cura amb el que passa a l'empalme de les cartes locals de la varietat: no s'ha de perdre mai l'orientació, en canviar de carta.

5.1.3. Proposició. Una varietat diferenciable, M, és orientable sii el fibrat de les referències està format per dos subconjunts disjunts.

Demostració. Es deixa com a *exercici* (es tracten, evidentment, de les referències d'orientació que'n direm positiva, i les d'orientació negativa).

5.1.4. Formes parelles i senars. Dins de ΛM hi ha doncs formes parelles i formes senars. Una forma senar es transforma sota un canvi de coordenades local com

$$\boxed{\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} = \frac{J}{|J|} \omega_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial \bar{x}^{i_k}}.}$$

Per construir la teoria d'integració en varietats diferenciables només cal considerar les formes parelles. Per tant, a partir d'ara ens limitarem a aquestes. L'objectiu és estendre el concepte d'integral de Lebesgue d'$\mathbb{R}^n$ a la varietat M. Es fa necessari repassar prèviament els conceptes més bàsics de teoria de la mesura, i aquest és l'objectiu de la secció que ve ara.

5.2. Promptuari de teoria de la mesura

Farem aquí un repàs gairebé telegràfic dels conceptes més fonamentals de la teoria de la mesura. Oblidem-nos en aquest instant de tot el que hem vist fins ara. Fins i tot de les nocions de topologia que vam repassar al primer capítol. Aquí comença ara una teoria diferent, absolutament general, edificada sobre un conjunt arbitrari, Ω (que en el context d'aquesta teoria rep el nom de conjunt universal), desproveït de cap mena d'estructura. La teoria de la mesura que ara comencem te les seves arrels en l'agrimensura de l'antic Egipte i, encara abans, en les mesures descrites en les tauletes d'escriptures cuneïformes dels babilonis, a l'ancestral Ur.

Com vam fer en introduir la Topologia, convé donar una idea intuitiva del que pretén la teoria de la mesura. Molt senzill: el que es pretén es *mesurar* (càlcul d'àrees, volums, masses, ...). Per això una mesura serà aditiva, monòtona i positiva. Queda ben clar que, a diferència del que succeeix en topologia, els recintes no seran ara 'de goma' (doncs l'àrea variaria) i, a més, les fronteres d'un domini no contribueixen a la mesura, en cap dimensió (són genèricament de mesura nul.la), així que no tindrà ara cap sentit distingir entre conjunts oberts i tancats.

Sigui com sigui, la introducció axiomàtica de la nova teoria s'assembla molt a la que vam fer per la topologia, però les diferències (que poden semblar petites) en els axiomes donen lloc a una teoria ben different d'aquella.

5.2.1. σ-àlgebra de conjunts. És una família no buida, $\mathcal{F}$, de subconjunts d'Ω, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, que satisfà

(1) $A_i \in \mathcal{F}, \forall\, i \in I \subset \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$;
(2) $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
d'aquests axiomes es dedueixen immediatament (*exercici*) les següents propietats addicionals
(3) $A_i \in \mathcal{F}, \forall\, i \in I \subset \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$;
(4) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

[Quan aquestes propietats només es verifiquen per a un nombre *finit* de conjunts (el conjunt d'indexs, I, és finit) aleshores es parla simplement d'una àlgebra de conjunts. En realitat, en un text formal es comença sempre fent tota la construcció per aquest cas més senzill.]

Exemples.

(1) $\mathcal{P}(\Omega)$ és una σ-àlgebra de conjunts.
(2) Donades $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, σ-àlgebres de conjunts, la seva intersecció, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, és també una σ-àlgebra de conjunts.
(3) Donada una família $\mathcal{A}$ de parts de Ω, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, la σ-àlgebra engendrada per $\mathcal{A}$ és la intersecció de totes les σ-àlgebres de conjunts que contenen $\mathcal{A}$.

5.2.2. La σ-àlgebra de Borel, $\mathcal{B}$. Donat un espai topològic, $(X, \mathcal{T})$, és la σ-àlgebra de conjunts engendrada per la topologia $\mathcal{T}$.

5.2.2.1. *σ-àlgebra de Borel de $\mathbb{R}$.* Evidentment, és un cas particular de l'anterior, amb la topologia usual generada pels intervals oberts.

Proposició. Les següents famílies de subconjunts de $\mathbb{R}$ engendren totes la mateixa σ-àlgebra de conjunts: la de Borel $\mathcal{B}$

(1) $\mathcal{A}_1 = \{(a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, intervals oberts;
(2) $\mathcal{A}_2 = \{[a,b] \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, intervals tancats;
(3) $\mathcal{A}_3 = \{[a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, intervals semi-tancats-oberts;
(4) $\mathcal{A}_4 = \{(a,b] \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, intervals semi-oberts-tancats;
(5) $\mathcal{A}_5 = \{(-\infty, a) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$, semirectes obertes, infinites per l'esquerra;
(6) $\mathcal{A}_6 = \{(-\infty, a] \,|\, a \in \mathbb{R}\}$, semirectes tancades, infinites per l'esquerra;

(7) $\mathcal{A}_7 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, semirectes obertes, infinites per la dreta;
(8) $\mathcal{A}_8 = \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, semirectes tancades, infinites per la dreta.

Demostració. Es deixa com a *exercici.*

Observacions.
(1) El mateix tipus de construcció es pot fer a $\mathbb{R}^n$, on la família $\mathcal{A}$ seria la colecció de totes les boles obertes (o tancades) o bé la dels n-cubs oberts (o tancats).
(2) És fàcil intuir que la de Borel és la σ-àlgebra de conjunts per excel.lència, l'exemple bàsic sobre el qual s'edifica tota la teoria de la mesura (així com la topologia usual generada per les boles obertes a $\mathbb{R}^n$ és l'exemple fonamental en topologia).
(3) Es pot també comprendre fàcilment el fet que en la família $\mathcal{F}$ no es distingeixi en absolut entre conjunts oberts i conjunts tancats, o els que tenen només part de la frontera. Cal recordar que l'àrea de la frontera d'un país val zero, com també el volum de la pela d'una patata. En altres paraules, la mesura de la frontera valdrà zero i per això no importa si hi és o no hi és, en teoria de la mesura o integració.

5.2.3. Espai mesurable. La parella formada per un conjunt arbitrari i una σ-àlgebra de conjunts, $(\Omega, \mathcal{F})$, rep el nom d'espai mesurable (*measurable space*).

Els elements de $\mathcal{F}$ reben el nom de conjunts mesurables (*measurable sets*).

5.2.4. Mesura σ-aditiva. En un espai mesurable, $(\Omega, \mathcal{F})$, és tota aplicació, μ, de la família $\mathcal{F}$ a la semirecta positiva ampliada,

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]^{\subset \bar{\mathbb{R}}},$$

que satisfà els dos axiomes següents[1]
(1) $A_i \in \mathcal{F}, \forall\, i \in I \subset \mathbb{N}, \ \wedge\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i \neq j \quad \Longrightarrow$ $\mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$, *$\sigma$-additivitat*;
(2) $\mu(\Omega)$ és *finit*;
d'aquests axiomes es dedueixen immediatament (*exercici*) les següents propietats addicionals:
(3) $\mu(\emptyset) = 0$;
(4) $\mu(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega) - \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}$;
(5) Si $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subset B$, aleshores $\mu(A) \leq \mu(B)$, *monotonia*;

[1] Recordar que $\wedge$ i $\vee$ són, respectivament, les connectives 'i' i 'o' de la lògica formal.

(6) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F}.$
(7) $\mu\left(\cup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + $
$+ \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \mu\left(\cap_{i=1}^m A_i\right),$
$\forall A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}.$

Quan aquestes propietats només es verifiquen per a un nombre finit de conjunts (el conjunt d'índexs I és finit), aleshores es parla simplement d'una mesura.

5.2.5. σ-espai de mesura. La terna formada per un conjunt arbitrari Ω, amb una σ-àlgebra $\mathcal{F}$ i una mesura σ-aditiva μ:

$$\boxed{(\Omega, \mathcal{F}, \mu),}$$

rep el nom de σ-espai de mesura. En el cas de I finit i μ mesura simplement, es parla d'espai de mesura (*measure space*).

Els elements de $\mathcal{F}$ reben aleshores el nom de conjunts mesurables (*measure sets*).

5.2.5.1. *Exemple important: espai de probabilitat.* Un espai de probabilitat és un espai de mesura en el qual la mesura està normalitzada a 1:

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1], \qquad \mu(\Omega) = 1.$$

A la mesura μ se li diu aleshores probabilitat P. Per altra banda, els conjunts P-mesurables reben el nom de successos i la $\mathcal{F}$ es designa per $\mathcal{S}$, σ-àlgebra de successos.

5.2.6. Aplicació σ-mesurable. Donats dos σ-espais mesurables, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, una aplicació σ-mesurable del primer al segon

$$f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2,$$

és tota aquella que compleix

$$\boxed{f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1,}$$

és a dir que l'antiimatge per f d'un conjunt mesurable (d'Ω_2) és un conjunt mesurable (d'Ω_1).

Una aplicació mesurable (que és el 'morfisme' de la teoria de la mesura) permet transportar tota mesura, μ_1, que tinguem definida en el primer espai mesurable, cap al segon espai, d'aquesta manera natural: donada μ_1 definim μ_2 com

$$\boxed{\mu_2(B) \equiv \mu_1(f^{-1}(B)), \qquad \forall\, B \in \mathcal{F}_2.}$$

Exercicis.

(1) Demostrar que d'aquesta forma obtenim efectivament una mesura al segon espai mesurable.

(2) Observi's l'extraordinària analogia d'aquesta definició amb la de funció contínua a topología. Estudiar amb cura les similituds i les diferències entre ambdues situacions: topologia i teoria de la mesura.

5.2.7. Funció σ-mesurable. Es tracta del cas particular d'aplicació σ-mesurable en el que el conjunt d'arribada és $\Omega_2 = \mathcal{R}$ i la σ-àlgebra és la de Borel, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}$, és a dir que la funció va a parar sempre a l'espai mesurable de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

5.2.7.1. *Exemple important: variable aleatòria.* En el cas d'un espai de probabilitat, $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, una funció mesurable qualsevol rep el nom de variable aleatòria

$$\boxed{x : (\Omega, \mathcal{S}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)}$$

Aquí hem posat $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$, doncs la variable aleatòria x converteix l'espai mesurable (probabilitzable) de Borel en un espai de mesura (de probabilitat), amb la mesura probabilística definida (d'acord amb el que acabem de veure):

$$\boxed{P_x(B) \equiv P(x^{-1}(B)), \quad \forall\, B \in \mathcal{B}.}$$

En particular, la funció de distribució de probabilitat de la variable aleatòria x ve donada per:

$$\boxed{F_x(t) = P_x(-\infty, t] = P(x^{-1}(-\infty, t])}$$

i com que ja hem vist que aquestes semirectes engendren *tota* l'àlgebra de Borel, doncs resulta que la funció de distribució de probabilitat, $F_x(t)$, *caracteritza completament* la mesura probabilística de la variable aleatòria x.

A partir d'ara comencem pròpiament el petit recordatori sobre la integral de Lebesgue.

5.2.8. Mesures de Stieltjes i Lebesgue.

5.2.8.1. *Mesura de Stieltjes.* Sigui F una funció real de variable real, $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua per la dreta i no decreixent. Aleshores existeix una mesura a la σ-àlgebra de Borel de $\mathbb{R}$

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty],$$

tal que es verifica

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \ a \leq b,\ \ \mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

S'escriu: $\mu = dF$.

5.2.8.2. *Mesura de Lebesgue.* És el cas particular en que F és la funció identitat: $F = I$ (e.g., $F(x) = x$):

$$\boxed{dx((a, b]) = b - a.}$$

En altres paraules, la mesura de Lebesgue és la longitud. Aquest concepte es pot estendre a $\mathbb{R}^n$ i aleshores la mesura de Lebesgue és l'hipervolum ordinari.

5.2.8.3. *Proposició.* Sigui $(\Omega, \mathcal{F})$ un espai mesurable i $A \subset \Omega$. Aleshores, la funció característica de A

$$\chi_A : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})),$$

és mesurable sii $A \in \mathcal{F}$.

Demostració. Es deixa com a *exercici*.

5.2.9. Integració Lebesgue d'una funció simple.

5.2.9.1. *Funció simple (o esglaonada).* A $(\Omega, \mathcal{F})$, una funció simple (o esglaonada) té el següent aspecte

$$\boxed{s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \ \alpha_i \in \mathbb{R}^+, \ A_i \in \mathcal{F}.}$$

5.2.9.2. *Integral de Lebesgue d'una funció simple.* A $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, espai de mesura, la integral de la funció simple precedent es defineix així

$$\boxed{I_\mu(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).}$$

Aquest valor existeix, perquè els conjunts A_i són mesurables i la suma és finita.

Observi's l'analogia d'aquest procés, fins aquí, amb el primer pas de la construcció de la integral de Riemann, en que es fa l'aproximació de la funció a integrar per mitjà de funcions esglaonades, definint les sumes superior i inferior corresponents. Noti's, però, que com correspon a la idea de la integral de Lebesgue (que és la que admet de manera natural la generalització tan gran que estem fent, dins de la teoria de la mesura, que *no* així la de Riemann), la 'partició en trossets' *no* té lloc al recinte d'integració (un subconjunt d'un Ω molt arbitrari), sino al conjunt d'arribada, el recorregut de la funció, que és sempre a $\mathbb{R}$. Els $A_i \subset \Omega$ són aleshores les antiimatges per s dels δ_i (petits intervals en torn als α_i) en que s'ha 'trossejat' (en fer l'aproximació per una funció esglaonada) el recorregut de s (Fig. 5.1).

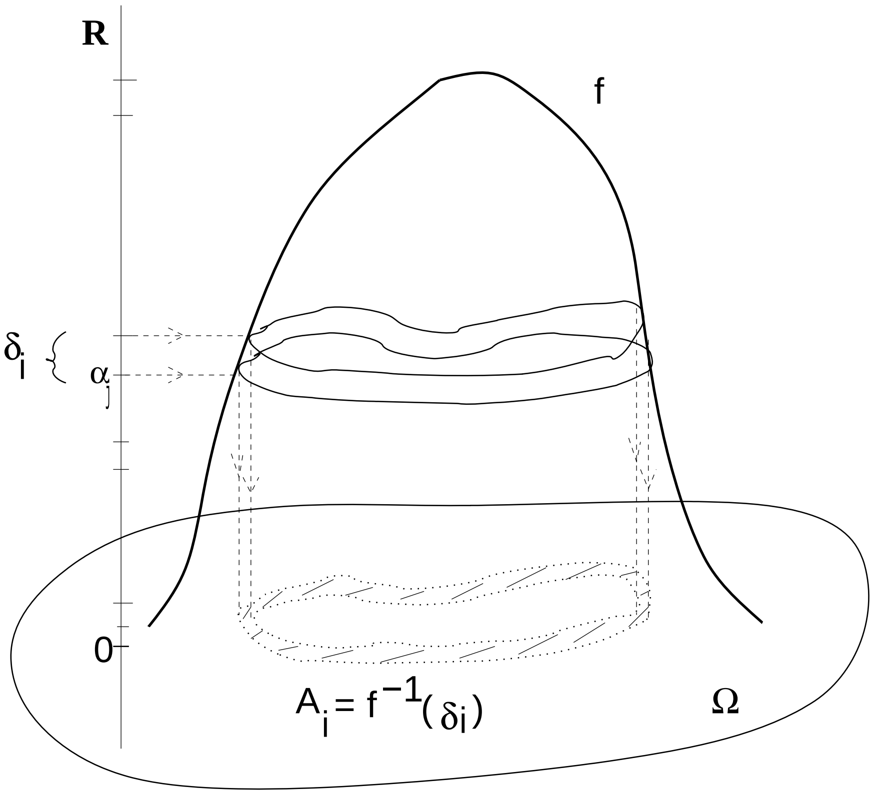


FIGURA 5.1. La integral de Lebesgue d'una funció mesurable f a $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, representada d'una manera esquemàtica, que posa de manifest les similituds i diferències amb la integral de Riemann. Cal observar que, en ser f mesurable respecte a l'àlgebra de Borel i com que els intervals són borelians, els $A_i = f^{-1}(\delta_i)$ seran sempre mesurables respecte a la mesura μ i té ple sentit l'aproximació de la integral: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(f^{-1}(\delta_i))$. Fent ara tendir max $(\delta_i) \to 0$ i si, e.g., el conjunt de punts de discontinuïtat de f és de mesura nul.la, aleshores obtenim una integral de Lebesgue ben definida (el límit existeix).

5.2.10. Integral de Lebesgue d'una funció mesurable. Donada ara, a l'espai de mesura $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, una funció mesurable no negativa

$$f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty],$$

la seva integral de Lebesgue respecte de la mesura μ es defineix com

$$\boxed{\int f \, d\mu = \sup \{ I_\mu(s) \mid s \ \text{simple}, s \leq f \},}$$

quan aquest suprem existeix. Es diu aleshores que la funció f és integrable Lebesgue (L-integrable). En cas contrari es diu que la funció no és integrable Lebesgue.

En principi podríem haver substituït el $\leq$ per un $\geq$, prenent després l'ínfim.

5.2.10.1. *Definició: propietat vàlida ae o ppt.* Direm que una propietat es verifica gairebé per tot arreu [*a.e., almost everywhere; p.p.t., presque par tout, f.ü. fast überall*] si es satisfá a tot el domini considerat, exceptuant com a molt un subconjunt de mesura de Lebesgue nul.la.

5.2.10.2. *Proposició.* Si el conjunt de punts de discontinuïtat de f té mesura de Lebesgue nul.la, aleshores f és L-integrable.

5.2.10.3. *Exemple.* La funció característica del conjunt de nombres racionals dins d'un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és integrable Lebesgue i la seva integral val 0. Si, en canvi, considerem la funció característica del conjunt de nombres irracionals dins de l'interval $[a, b]$, la seva integral val $b-a$. Cap d'aquestes dues funcions no és integrable Riemann (¿per què?). I, en ambdós casos, el conjunt de punts de discontinuïtat de la funció considerada te mesura de Lebesgue nul.la.

5.2.10.4. *Propietats de la integral de Lebesgue.*

(1) Linealitat: $\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Monotonia: $f \leq g \Longrightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Exercicis.

(1) Demostrar la proposició ajudant-se d'un llibre de teoria de la integració.
(2) Demostrar aquestes propietats de la integral de Lebesgue.
(3) Com en el cas senzill de la integral de Riemann d'una funció real de variable real, es pot fàcilment definir, a continuació, la integral d'una funció que te parts negatives, tot separant el domini que va a parar als valors negatius del que va a parar als no negatius i tractant les dues integrals per separat. Fer-ho amb detall.

5.2.11. Teoremes fonamentals sobre la integral de Lebesgue.

5.2.11.1. *Teorema de la convergència monòtona.* Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espai de mesura. Considerem una successió, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funcions integrables Lebesgue $f_n : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$, monòtona creixent i tal que

$f_n \nearrow f$, a.e. Aleshores f és mesurable i

$$\boxed{\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu.}$$

Aquest teorema s'extén també a funcions que tinguin en general part negativa —separant (com hem dit abans) les seves parts positiva i negativa.

5.2.11.2. *Teorema de la convergència dominada.* Siguin $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurables, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, i tals que $f_n \to f$ a $\mathbb{C}$, puntualment, a.e. Suposem que[2] existeix $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Resulta aleshores que $f, f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, i a més

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0.}$$

5.2.11.3. *Teorema (de subaditivitat).* Si existeix la integral de Lebesgue de $|f|$, aleshores

$$\boxed{\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.}$$

5.2.11.4. *Lemma de Riemann-Lebesgue.* Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mesurable i $L^1_{[a,b]}$. Aleshores, la integral (de Lebesgue)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, e^{inx} \, dx \longrightarrow 0, \quad n \to \pm\infty.}$$

Exercici. Buscar les demostracions d'aquests teoremes (i d'altres més) en un llibre de teoria de la integració, i estudiar-les.

5.3. Integració en varietats

Ara veurem ja la integració d'una n-forma diferenciable, ω, en una varietat diferenciable, M_n, paracompacta i orientada.

5.3.1. Definicions: mesura de Lebesgue zero i propietat vàlida *ae* o *ppt* a la varietat.

(1) $S \subset M_n$ és un conjunt de mesura de Lebesgue zero sii és una unió numerable (finita o infinita) d'antiimatges a M_n, per les funcions coordenades, de conjunts de mesura zero a $\mathbb{R}^n$.

[2] Recordem la definició dels espais L^p en general: $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si f és mesurable i existeix la integral de Lebesgue de $|f|^p$, $\int |f|^p$.

(2) Direm que una aplicació (o propietat) està definida **gairebé per tot arreu** (*a.e.*, *p.p.t.*) a la varietat sii està definida a tota M_n excepte un subconjunt de la varietat que te mesura de Lebesgue zero (definició precedent).

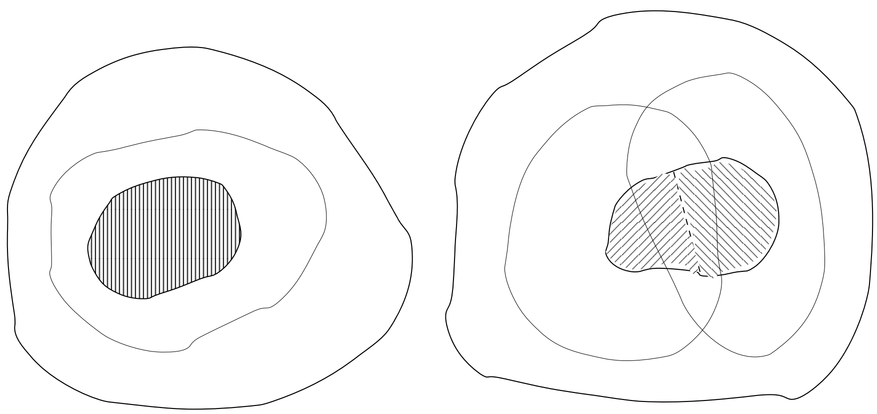
A partir d'ara, sempre que diguem mesura, i prou, s'entendrà que es tracta de la mesura de Lebesgue.

5.3.2. Integració d'una n-forma a suport compacte.

5.3.2.1. *Suport dins d'una carta.* Sigui ω una n-forma a suport compacte, K, contingut en el domini, U, d'una carta local $\{U, (x^i)\}$: sop $\omega = K \subset U$ (Fig. 5.2(a)).

Per definició, direm que ω és integrable a M_n sii la seva component $\omega_{1\ldots n}(x^1, \ldots, x^n)$ és integrable Lebesgue a $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\int_{M_n} \omega = \int_U \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{1\ldots n}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \cdots dx^n.}$$



(a) **(b)**

FIGURA 5.2. (a) El suport compacte de la forma a integrar està contingut dins d'una carta local. (b) Cas general: en ser el suport compacte, queda sempre contingut dins d'un nombre finit de cartes de l'atles i el podem partir en trossos, convenientment, a l'hora d'integrar la forma (aquí es detalla pel cas de dues cartes).

5.3.2.2. *Cas general.* En general, donat un atles qualsevol, $\mathcal{A}$, el suport interseca una unió finita de cartes de l'atles, $K \subset \cup_{i=1}^m U_i$, i la integral tindrà una suma finita de contribucions d'aquest mateix tipus, un cop trossejat convenientment K en parts $K_i \subset U_i$. Cada integració d'aquestes porta associat un canvi de coordenades (a les de cada carta), amb el corresponent canvi de mesura d'integració en les noves coordenades, que ve multiplicat pel jacobià del canvi, com sabem. Vegeu la Fig. 5.2(b), corresponent al cas $m = 2$ que hom pot generalitzar de manera immediata al cas m finit arbitrari (recordem que les fronteres de la partició de K no contribueixen a la integral de Lebesgue, en ser de mesura nul.la).

5.3.3. Integració d'una n-forma a suport arbitrari.

5.3.3.1. *Partició de la unitat.* De classe C^r a M_n (varietat C^k) és un conjunt $\{\theta_i\}_{i\in I}$ de funcions C^r,

$$\theta_i : M_n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \theta_i \geq 0, \quad \forall\, i \in I,$$

tals que:

(1) La colecció de suports, $\{\text{sop}\ \theta_i\}$, és *localment finita*, això és: $\forall\, p \in M_n$ només un nombre finit de θ_i's són tals que $\theta_i(p) \neq 0$.
(2) El sop θ_i és *compacte*, $\forall\, i \in I$.
(3) $\sum_{i\in I} \theta_i(p) = 1$, $\forall\, p \in M_n$ (*normalització*, observi's qu'aquesta suma sempre és finita, per la condició 1).

5.3.3.2. *Construcció d'una partició de la unitat a* $\mathbb{R}^n$. Sigui $\{B_a^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recobriment de $\mathbb{R}^n$ per boles obertes de radi a centrades en un conjunt numerable de punts, x_i, $i \in \mathbb{N}$ (per exemple, els vèrtex del reticle infinit d'aresta a). Definim aleshores les θ_i així:

$$\theta_i(x) = \frac{\theta_a(x - x_i)}{\sum_i \theta_a(x - x_i)},$$
$$\theta_a(x - x_i) \equiv \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{a^2}{a^2 - (x - x_i)^2}\right], & |x - x_i| \leq a, \\ 0, & |x - x_i| \geq a. \end{cases}$$

Es veu immediatament (*exercici*) que se satisfan totes les condicions de la definició, éssent aquesta una partició C^∞ (Fig. 5.3).

5.3.3.3. *Partició subordinada.* Una partició de la unitat, $\{\theta_i\}_{i\in I}$, direm que està subordinada a un recobriment $\{U_j\}_{j\in J}$ de M_n, si $\forall\, i, \exists\, U_j$ amb sop $\theta_i \subset U_j$.

5.3.3.4. *Teorema (d'existència).* Si X és un espai topològic paracompacte, aleshores, donat qualsevol recobriment localment finit de X, sempre es pot trobar una partició de la unitat subordinada a ell.

Observacions.

(1) Des d'ara suposarem sempre que la varietat M_n és paracompacta i que satisfà el segon axioma de numerabilitat.

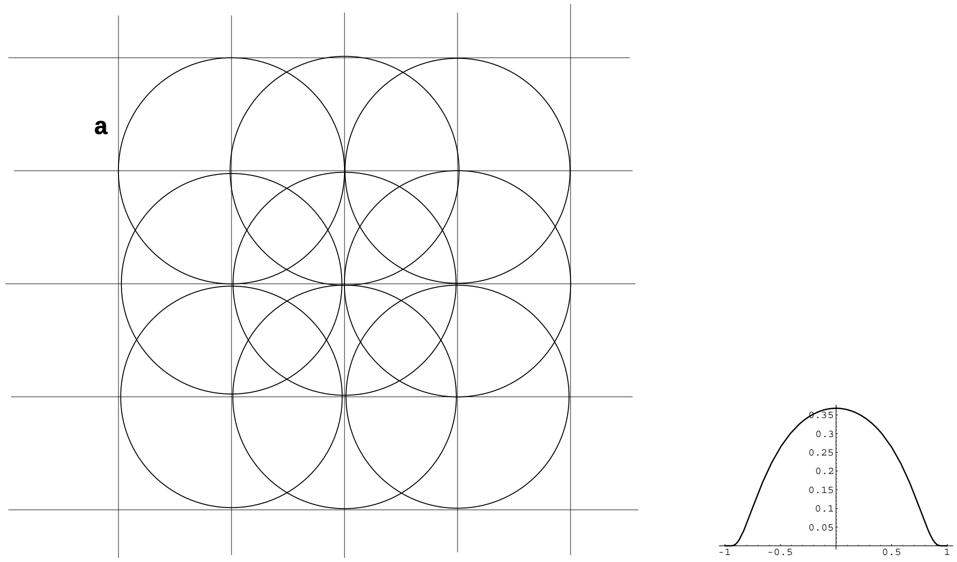


FIGURA 5.3. Partició de la unitat representada pel cas $n = 2$. Dins de cada cercle dels dibuixats, la funció corresponent, θ_i, és finita, amb un valor màxim d'$1/e$ al centre del cercle, mentre que sobre tota la circumferència val 0, assolint aquest valor de manera infinitament suau (totes les derivades són zero). Observem que, en aquest exemple, si ens situem a qualsevol punt del pla, només hi ha contribució no nul.la de 2, 3 o 4 funcions de la partició. Identifiqueu aquestes regions en un quadrat genèric.

(2) Cal observar que si bé el concepte de partició de la unitat és del tot fonamental en la teoria de la integració (i no solament sobre varietats), no té en realitat un valor pràctic a l'hora de calcular integrals.

5.3.4. Integració d'una n-forma ω a M_n. Suposarem, com hem dit, que la varietat M_n és paracompacta i te una base d'entorns numerable. Sigui $\{\theta_i\}_{i\in I}$ (ara $I \subset \mathbb{N}$) una partició de la unitat subordinada a un atles de M_n. La n-forma ω és integrable a M_n si $\theta_i\omega$ és integrable a M_n, $\forall\, i \in I$, i a més, la sèrie següent convergeix, rebent aleshores el límit el nom d'integral d'ω a M_n:

$$\boxed{\sum_i \int_{M_n} \theta_i\omega = \int_{M_n} \omega.}$$

(1) Si hi ha convergència es veu aleshores que la definició no depèn de la tria de l'atles o de la partició de la unitat.

(2) Si sop ω és compacte, la suma és finita i, per tant, sempre convergeix (és el cas anterior).
(3) Tota n-forma ω contínua és integrable en una varietat M_n compacta.
(4) La integració en un subconjunt, $S \subset M_n$, es defineix usant la seva funció característica:

$$\boxed{\int_S \omega = \int_{M_n} \chi_S \, \omega.}$$

5.3.5. Propietats de la integral.

(1) La integral de Lebesgue a varietats és un funcional lineal:

$$\int_{M_n} (a\omega + b\eta) = a \int_{M_n} \omega + b \int_{M_n} \eta,$$

on a i b són constants.
(2) La integral de Lebesgue a varietats és un funcional contínuo.
(3) Additivitat del domini d'integració:
si $A \cup B = M_n$, $A \cap B = \emptyset$, aleshores

$$\int_{M_n} \omega = \int_{M_n} (\chi_A + \chi_B)\omega = \int_A \omega + \int_B \omega.$$

(4) Si la mesura de Lebesgue de B és nul.la, mes $B = 0$, aleshores

$$\int_A \omega = \int_{A \cup B} \omega.$$

(5) Si $f : M_n \longrightarrow M'_n$ és un difeomorfisme de varietats que preserva l'orientació, aleshores

$$\int_{M_n} f^* \omega = \int_{M_n{}'} \omega.$$

Exercici. Descriure, amb detall, com un canvi de variables en una integral multidimensional feta a $\mathbb{R}^n$ no és altra cosa que un cas particular d'aquesta situació. En concret, a $f^*\omega$ s'hi amaga el determinant de la matriu jacobiana del canvi de variables. Construir-ne un exemple concret per tal de practicar aquesta nomenclatura abstracta.

Notació. Escriurem $\int_{M_n} \omega \equiv \langle M_n, \omega \rangle$.

5.4. Teorema de Stokes en varietats

Entrem ara en la secció central d'aquest capítol, en la qual farem un resum dels conceptes i resultats més importants en relació al teorema de Stokes en varietats diferenciables. Aquest teorema, que suposarem conegut al nivell de $\mathbb{R}$ (teorema fonamental del càlcul integral) i de $\mathbb{R}^n$ (una magnífica referència n'és el llibre de M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Ed. Reverté), és un dels més importants de la Matemàtica, tant pel fet de connectar dos universos completament diferents —el de la integració (suma, volums, massa) amb el de la diferenciació (tangents, ritmes, velocitats)— com per les seves nombroses i importantíssimes aplicacions.

Recordem les fòrmules clàssiques:

(1) A $\mathbb{R}^n$, amb $\omega \in C^1$ i C domini diferenciable ,

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega,}$$

o bé, en l'altra nomenclatura,

$$\boxed{\langle C, d\omega \rangle = \langle \partial C, \omega \rangle.}$$

(2) A $\mathbb{R}$, la fòrmula de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a),}$$

amb F una primitiva qualsevol de f.

(3) A $\mathbb{R}^3$, la fòrmula de Gauss (o de Green-Ostrogradsky)

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S},}$$

que diu que la quantitat de divergència a V és igual al flux a través de la superfície $S = \partial V$.

(4) I també a $\mathbb{R}^3$, la fòrmula de Stokes clàssica (o de Riemann-Ampère)

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})\, dS = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{l},}$$

que diu que la circulació al llarg de $C = \partial S$ és igual al flux del rotacional.

Aquí ens fixarem particularment en com el teorema es transporta i formula a una varietat diferenciable.

5.4.1. Dominis d'integració.

5.4.1.1. *k-símplex.* A $\mathbb{R}^k$, donats $k+1$ elements de $\mathbb{R}^k$, $a_1, \ldots, a_k$, linealment independents, el k-símplex que determinen és:

$$\boxed{[a_1, \ldots, a_k] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \;\mid\; 0 \leq \lambda_i \leq 1,\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.}$$

Es tracta, segons la dimensió k, d'un triangle, tetrahedre, etc: és l'*envolvent lineal convexa* dels punts.

5.4.1.2. *k-rectangle.* A $\mathbb{R}^k$,

$$\boxed{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k].}$$

Es tracta d'un hiperrectangle, també dit k-cub.

Uns i altres donen la mateixa teoria de la integració. Generalment, els símplexs s'utilitzen més en l'estudi de l'homologia, mentre que els hiperrectangles són més emprats en la construcció de la teoria de la integració.

5.4.1.3. *k-cadena elemental i k-domini d'integració elemental.* A una varietat diferenciable M_n, una k-cadena elemental, $c = (P, f)$, consisteix en un rectangle, $P \in \mathbb{R}^k$, i una aplicació diferenciable, f, d'un obert de $\mathbb{R}^k$ que conté P en la varietat:

$$f : U \longrightarrow M_n, \qquad P \subset U.$$

Es defineix el suport de la cadena com: $\operatorname{sop} c \equiv f(P) \subset M_n$.

Un k-domini d'integració elemental és una cadena elemental amb f difeomorfisme i tal que $f(U) \subset M_n$ és una k-subvarietat diferenciable ($\operatorname{rang} f = k$).

5.4.1.4. *k-cadena i k-domini d'integració.* A una varietat diferenciable M_n, una k-cadena C, és una combinació lineal formal de k-cadenes elementals:

$$\boxed{C = \sum_i \lambda_i c_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.}$$

Un k-domini d'integració és una cadena en la que les c_i són k-dominis d'integració elementals.

5.4.2. Integrals de k-formes sobre k-cadenes. En una varietat diferenciable M_n, sigui ω un camp de k-formes diferenciables i $c = (P, f)$ un k-domini d'integració elemental. Aleshores, definim

$$\boxed{\int_c \omega \equiv \int_P f^* \omega.}$$

Per a un k-domini d'integració $C = \sum_i \lambda_i c_i$, definim

$$\boxed{\int_C \omega \equiv \sum_i \lambda_i \int_{c_i} \omega \equiv \langle C, \omega \rangle.}$$

Com que la descomposició d'una cadena C en cadenes elementals no és en general única, és necessari considerar la següent relació d'equivalència.

5.4.2.1. *Definició.* Donades dues cadenes, C i C', direm que són equivalents si

$$C \sim C' \iff \int_C \omega = \int_{C'} \omega, \quad \forall\, \omega.$$

5.4.2.2. *Frontera o vora.* Donat un k-cub, $P \subset \mathbb{R}^k$, la seva **vora** (o **frontera**, aquí la nomenclatura és confusa i depèn de l'autor) ∂P està formada pels $(k-1)$-cubs donats per les cares $x^i = a^i$, $x^i = b^i$ (n'hi ha $2k$):

(1) cara $x^i = a^i$, $\quad (x^1, \dots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \dots, x^k)$;
(2) cara $x^i = b^i$, $\quad (x^1, \dots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \dots, x^k)$;
amb $a^j \le x^j \le b^j$, $j = 1, \dots, \widehat{i}, \dots, k$.

Es diu que la vora ∂P està **orientada** (coherentment) si l'orientació de les cares és (Fig. 5.4)

$$+(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots x^k) \quad \text{per} \quad \begin{cases} x^i = a^i, & i \text{ parell}, \\ x^i = b^i, & i \text{ senar}, \end{cases}$$

$$-(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots x^k) \quad \text{per} \quad \begin{cases} x^i = a^i, & i \text{ senar}, \\ x^i = b^i, & i \text{ parell}. \end{cases}$$

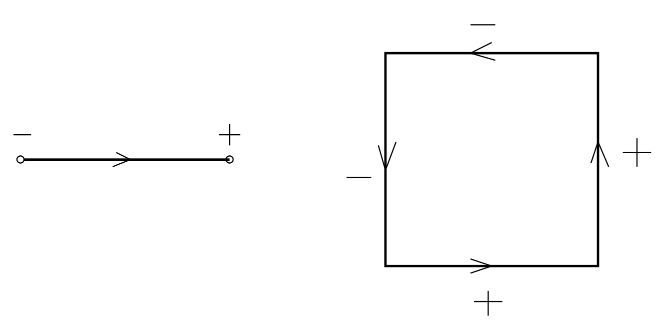


FIGURA 5.4. La vora orientada d'un 1-cub (segment) i d'un 2-cub (rectangle) elementals.

La **vora orientada d'una cadena** es defineix de manera natural, a partir de les vores orientades de les seves cadenes elementals, com la combinació lineal formal:

$$\boxed{\partial C = \sum_i \lambda_i \partial c_i,}$$

sent C el domini d'integració constituït per aquests dominis elementals.

5.4.2.3. *Propietats de l'operador vora.*

(1) Linealitat: $\partial(\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2) = \mu_1 \partial C_1 + \mu_2 \partial C_2$ (per construcció).
(2) Nilpotència (la vora d'una vora és sempre buida): $\partial^2 = 0$ (demostrar-la, com a *exercici*, a partir de la definició).
(3) L'operador vora permet definir una homologia sobre els espais vectorials de cadenes (intentar construir-la, com a *exercici*, de manera semblant a com ho vàrem fer per la cohomologia; aviat en veurem més detalls).

5.4.2.4. *Varietat triangulable.* Una varietat orientada, M_n, es diu triangulable sii es pot descompondre en una unió finita de dominis elementals n-dimensionals de la mateixa orientació que M_n. Aleshores

$$\boxed{\int_{M_n} \omega = \int_C \omega.}$$

5.4.3. Aplicació de cadenes. Sigui $g : M_n \longrightarrow M_m$ una aplicació diferenciable entre varietats, i $c = (P, f)$ un domini d'integració elemental de la varietat M_n. Aleshores, g ens defineix de manera natural una aplicació de dominis:

$$g(c) = (P, g \circ f)$$

i hom té

$$\int_{g(c)} \omega = \int_c g^* \omega.$$

5.4.3.1. *Teorema (aplicació pròpiament diferenciable).* Si

$$f : M_n \longrightarrow M_n{}'$$

és una aplicació *pròpiament diferenciable* (l'antiimatge d'un compacte és un compacte) i a més

- o bé ω és una n-forma diferenciable a *suport compacte* i C un domini d'integració *localment finit*,
- o bé C és un domini d'integració *finit*,

aleshores

$$\boxed{\int_{f(C)} \omega = \int_C f^* \omega.}$$

Demostració. És senzilla, es deixa com a *exercici*.

5.4.3.2. *Teorema (grau d'una aplicació).* Si M_n i ${M_n}'$ són dues varietats connexes i orientades i

$$f : M_n \longrightarrow {M_n}'$$

és una aplicació pròpiament diferenciable que preserva l'orientació, aleshores existeix un enter, que rep el nom de grau de f, tal que, per a tota n-forma ω a suport compacte:

$$\boxed{\int_{M_n} f^*\omega = \text{ grau } (f) \int_{{M_n}'} \omega.}$$

Demostració. Es deixa com a *exercici* (ajudar-se d'algun llibre de text de la bibliografia).

5.4.4. Teorema de Stokes en varietats. Donada una varietat diferenciable M_n, una $(k-1)$-forma diferenciable, ω, i una k-cadena diferenciable orientable amb vora ∂C diferenciable a trossos, que té l'orientació induïda, i tal que

- o bé ω té suport compacte i C és un domini d'integració localment finit,
- o bé C és un domini d'integració finit,

aleshores:

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.}$$

5.4.4.1. *Generalitzacions del teorema.*

(1) A varietats diferenciables no orientables, quan la forma ω és *twisted* (això compensa la no orientabilitat).
(2) A tota la varietat diferenciable, orientada i amb vora diferenciable a trossos i que té l'orientació induïda, en les mateixes condicions alternatives d'abans per la forma ω.

Demostració. Només en donarem la idea. Es comença demostrant-ho pel cas d'un k-cub a $\mathbb{R}^n$ (ex. llibre de Spivak). Aleshores, fent-ne ús de la definició es demostra per a un k-cub (domini d'integració elemental) de la varietat i, finalment, es passa al cas d'una k-cadena.

A part d'haver de tenir en compte la dificultat del còmput de les diverses cares de la vora, el cas d'un k-cub, en general, no és molt diferent del cas d'un rectangle ($k = 2$), que es pot resoldre de manera senzilla com segueix (Fig. 5.5).

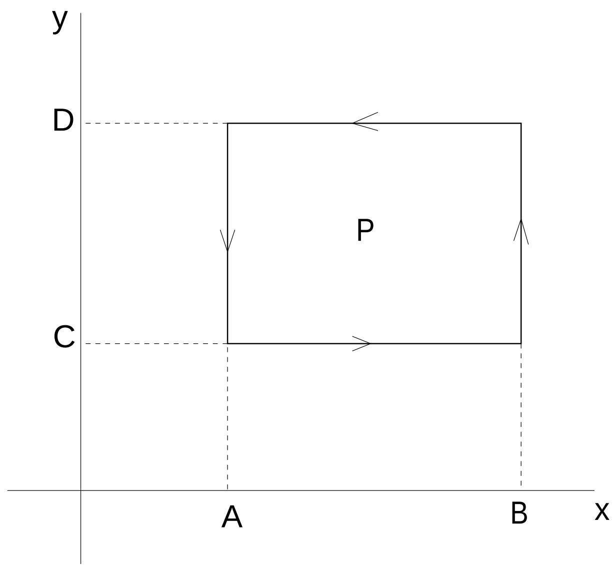


FIGURA 5.5. Figura corresponent al cas elemental de la demostració del teorema de Stokes que es detalla al text.

Hom té (hi sobren els comentaris)

$$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy, \qquad d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

d'on

$$\begin{aligned}
\int_P d\omega &= \int_P \frac{\partial b}{\partial x}\, dx \wedge dy - \int_P \frac{\partial a}{\partial y}\, dx \wedge dy \\
&= \int_C^D [b(B,y) - b(A,y)]\, dy - \int_A^B [a(x,D) - a(x,C)]\, dx \\
&= \int_A^B a(x,C)\, dx + \int_C^D b(B,y)\, dy + \int_B^A a(x,D)\, dx + \int_D^C b(A,y)\, dy \\
&= \int_{\partial P} \omega.
\end{aligned}$$

Exercici. Fer la demostració del teorema de Stokes pel cas d'una varietat compacta i amb vora (caldrà pot ser emprar algun llibre).

5.5. Homologia i cohomologia

5.5.1. Dualitat forma-cadena. El teorema de Stokes deixa ben palesa l'extraordinària simetria que hi ha entre formes a integrar i recintes d'integració (cadenes), i també entre els propis operadors en cada cas: d (diferencial exterior) i ∂ (operador vora). Això es reflecteix encara més en la nomenclatura que ja hem introduït i que farem servir a partir d'ara, en la qual el teorema de Stokes s'escriu:

$$\boxed{\langle C, d\omega\rangle = \langle \partial C, \omega\rangle.}$$

En particular, un resultat que s'obté d'aquí, de manera immediata, és el següent.

5.5.1.1. *Proposició.* $d^2 = 0 \iff \partial^2 = 0.$

Demostració. En efecte, considerem les igualtats, ja demostrades,

$$\langle \partial^2 C, \omega\rangle = \langle \partial C, d\omega\rangle = \langle C, d^2\omega\rangle.$$

Com que nosaltres hem començat per l'estudi de les formes i hem demostrat allí que $d^2 = 0$, en deduïm ara que l'operador vora també és nilpotent: $\partial^2 = 0$. Però cal observar que aquest no té per què ser l'ordre natural de fer les coses. Podríem perfectament haver començat per l'estudi a fons dels recintes d'integració: la teoria dels complexos simplicials (que condueix a l'homologia, en lloc de la cohomologia que ja hem vist). En poques paraules, ambdós termes d'aquestes equacions són igualment fonamentals (i fins i tot es pot dir que, en definitiva, és més natural començar per l'estudi dels recintes d'integració que per les formes a integrar sobre aquests recintes). De totes maneres aquests últims són del domini de la Topologia Algebraica, que hom considera una rama més avançada dins de la Matemàtica.[3]

5.5.2. Homologia i cohomologia. Serem bastant esquemàtics. Donada una varietat diferenciable M_n, considerem, en paral.lel,

- $\Lambda(M_n)$, conjunt de formes diferenciables,
- $C(M_n)$, conjunt de cadenes (finites) diferenciables.

Ambdós són espais vectorials graduats (en el sentit que ja vàrem veure pel primer cas) amb l'operador diferencial exterior d i l'operador vora ∂, respectivament:

- l'operador covora (*coboundary*)

$$\boxed{d : \Lambda(M_n) \longrightarrow \Lambda(M_n), \quad d\Lambda^k \subset \Lambda^{k+1}, \quad d^2 = 0,}$$

$$\boxed{\cdots \longrightarrow \Lambda^{k-1}(M_n) \xrightarrow{d_{k-1}} \Lambda^k(M_n) \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1}(M_n) \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots}$$

- l'operador vora (*boundary*)

$$\boxed{\partial : C(M_n) \longrightarrow C(M_n), \quad \partial C_k \subset C_{k-1}, \quad \partial^2 = 0,}$$

[3] És per això que nosaltres hem seguit aquí aquesta mena d'ordre 'invers'.

$$\boxed{\cdots \xleftarrow{\partial_{k-1}} C^{k-1}(M_n) \xleftarrow{\partial_k} C^k(M_n) \xleftarrow{\partial_{k+1}} C^{k+1}(M_n) \longleftarrow \cdots}$$

- ω: $d\omega = 0$ cocicle (*cocycle*, forma tancada),
- C: $\partial C = 0$ cicle (*cycle*, cadena tancada);

- ω: $\omega = d\theta$ covora (*coboundary*, forma exacta),
- C: $C = \partial B$ vora (*boundary*, 'cadena exacta');

- Z^k espai de cocicles de grau k,
- Z_k espai de cicles de grau k,
- B^k espai de covores de grau k,
- B_k espai de vores de grau k;

les relacions d'equivalència són, en cada cas,

- $\omega_1 \sim \omega_2$ sii $\exists\, \theta$ tal que $\omega_1 - \omega_2 = d\theta$,
- $C_1 \sim C_2$ sii $\exists\, B$ tal que $C_1 - C_2 = \partial B$.

Proposició. Les següents successions són exactes:

$$\boxed{0 \longrightarrow B^k \xrightarrow{d} Z^k \longrightarrow H^k \longrightarrow 0, \quad B^k = \mathrm{Im}\ d_{k-1}, \quad Z^k = \mathrm{Ker}\ d_k,}$$

$$\boxed{0 \longleftarrow H_k \longleftarrow Z_k \xleftarrow{\partial} B_k \longleftarrow 0, \quad B_k = \mathrm{Im}\ \partial_{k-1}, \quad Z^k = \mathrm{Ker}\ \partial_k.}$$

Aleshores, els espais d'homologia i de cohomologia de la varietat són:

- $\boxed{H^k = Z^k/B^k}$ k-espai de cohomologia de M_n,
- $\boxed{H_k = Z_k/B_k}$ k-espai d'homologia de M_n.

Hom té que:

(1) $B^0(M_n) = \emptyset$, per convenció.
(2) $\dim H^0(M_n) = \#$ de components connexes de M_n.
(3) $b_p = \dim H^p$ i $b_p = \dim H_p$ reben el nom de nombres de Betti.

5.5.2.1. *Lemma de Poincaré.* En un obert U homeomorf a $\mathbb{R}^n$ totes les formes tancades, d'ordre $k \geq 1$, són exactes, e.g.,

$$b^k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostració 1. Sigui ω una k-forma tancada, $d\omega = 0$. Busquem una $(k-1)$-forma, θ, tal que $\omega = d\theta$. Ho farem construint una aplicació $T : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ lineal i tal que $T\,d + d\,T = I$, d'on serà $d\,T\omega = \omega$ i $\theta = T\omega$. La construcció de T es fa així:

$$T\omega(x) = \int_0^t t^{k-1} i_x \omega(tx)\, dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

d'on tenim que

$$\begin{aligned}(T\,d + d\,T)\omega(x) &= \int_0^t t^{k-1}(i_x\,d + d\,i_x)\omega(tx)\,dt \\ &= \int_0^t t^{k-1}\mathcal{L}_x\omega(tx)\,dt = \int_0^t \frac{d}{dt}[t^k\omega(tx)]\,dt \\ &= \omega(x),\end{aligned}$$

c.v.d., on hem fet servir la regla de la cadena pel càlcul de la derivada:

$$\frac{d}{dt}[t^k\omega(tx)] = kt^{k-1}\omega(tx) + t^k\frac{\partial\omega}{\partial(tx^j)}\frac{d(tx^j)}{dt} = kt^{k-1}\omega(tx) + t^{k-1}\frac{\partial\omega}{\partial x^j}\,x^j.$$

Demostració 2 (per a un monomi). És el cas més senzill, però ens dóna ja una idea molt precisa del significat del teorema. Sigui ω la k-forma tancada: $\omega = f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k$,

$$d\omega = 0 \implies \frac{\partial\omega}{\partial x^{k+1}} = \cdots = \frac{\partial\omega}{\partial x^{k+1}} = 0 \implies f = f(x^1,\ldots,x^k);$$

d'on

$$\theta = g(x^1,\ldots,x^k)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k, \quad \text{amb } \frac{\partial g}{\partial x^1} = f,$$

satisfà $\omega = d\theta$, c.v.d.

Contraexemple. El lemma de Poincaré falla si ω deixa de ser diferenciable en algun punt de M_n.

Així,

$$\omega = \frac{-x^2dx^1 + x^1dx^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2)} = d\,\arctan(x^2/x^1),$$

que és diferenciable a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, és una forma tancada però *no* exacta (veure-ho, com a *exercici*).

5.5.2.2. *Cohomologia en compactes.* Tornem a construir la teoria de la cohomologia, però ara en lloc de treballar a $\Lambda(M)$ o fem a $\mathcal{D}(M)$, formes diferenciables amb suport compacte, i quan a les cadenes diferenciables $\mathcal{C}$ seran ara localment finites. En aquests cas tenim un lemma de Poincaré lleugerament diferent.

5.5.2.3. *Lemma de Poincaré en compactes.* A $\mathbb{R}^n$ tota k-forma tancada amb suport compacte, si $k<n$, és una covora d'una $(k-1)$-forma amb suport compacte, i una n-forma també ho és sii $\int_{\mathbb{R}^n}\omega = 0$.

Demostració. Observar, efectivament, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta = \int_{\partial\mathbb{R}^n}\theta = 0,$$

ja que θ té suport compacte. La resta es deixa com a *exercici.*

Corolari. Del lemma resulta que:

$$b_c^j = 0, \quad 0 \le j \le n-1, \quad b_c^n = 1.$$

Demostració. La darrera conclusió prové del fet que, donada ω amb $\int \omega \ne 0$, aleshores, per tot múltiple $k\omega$ (amb $k \ne 0$ evidentment), també se satisfà que la integral és no nul.la, i només per a aquestes formes.

Combinant tots els resultats precedents, hom té la següent taula (Taula 5.1) de nombres de Betti, per als casos considerats i pels exemples particulars de l'esfera i el torus (comprovar-ne un a un els valors, com a *exercici*).

Nombres de Betti	b^0	b^1	b^k	b^{n-1}	b^n
$\Lambda(\mathbb{R}^n)$	1	0	0	0	0
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	0	0	0	0	1
$\Lambda(\mathbb{S}^n),\ \mathcal{D}(\mathbb{S}^n)$	1	0	0	0	1
$\Lambda(\mathbb{T}^n),\ \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$	1	n	$\binom{n}{k}$	n	1

TAULA 5.1. Taula de nombres de Betti, per als casos considerats en el text i pels exemples particulars de l'esfera i del torus, en que hi ha coincidència de les homologies compacta i no compacta. Observar les dualitats: $b^k = b_c^{n-k}$ en el cas de $\mathbb{R}^n$, i $b^k = b_c^k$ i $b^k = b^{n-k}$ en els casos de l'esfera i del torus.

5.5.3. Dualitat.

5.5.3.1. *Cadenes finites i formes a suport arbitrari: Teorema de de Rham.* La forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : H_k \times H^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([C],[\omega]) &\mapsto \langle C, \omega \rangle \end{aligned}$$

(que va dels germens de k-cadenes i k-formes, a través de la tria d'un representant, en els nombres reals, $\int_C \omega$) és bilineal i no degenerada, establint una dualitat entre els espais vectorials d'homologia i de cohomologia, H_k i H^k i, conseqüentment, la igualtat dels nombres de Betti

$$b_k = b^k,$$

quan H_k (o bé H^k) és de dimensió finita.

Demostració. $C \in B_k \Rightarrow \langle C, \omega \rangle = 0, \forall\, \omega$, pel teorema de Stokes, ja que

$$\langle C, \omega \rangle = \langle \partial B, \omega \rangle = \langle B, d\omega \rangle = \langle B, 0 \rangle = 0.$$

I de la mateixa manera: $\omega \in B^k \Rightarrow \langle C, \omega \rangle = 0, \forall\, C$, pel teorema de Stokes.

La demostració de la no degeneració es fa raonant a la inversa.

5.5.3.2. *Cadenes localment finites i formes a suport arbitrari: Teorema de dualitat de Poincaré.* H^k amb suport arbitrari és el dual de H_c^{n-k} amb suport compacte, és a dir que:

$$b^k = b_c^{n-k}.$$

Demostració. Es deixa com a *exercici*.

Observacions.

(1) Si la varietat base, M_n, és compacta aleshores no hi ha diferències entre els dos tipus d'homologia:
$b^k = b_c^k$, i a més $b^k = b^{n-k}$.

(2) El teorema de de Rham estableix aquí també la dualitat entre la *cohomologia compacta*, H_c^k, i l'*homologia de cadenes infinites*, IH_k, per a varietats diferenciables orientables.

(3) *Exemple.*
Si M_n és triangulable i connexa, aleshores $IH_k(M_n)$ té dimensió 1 com a molt.
Quan $M_n = \mathbb{R}^n$ aquest resultat s'obté de la taula:
$Ib_n = b_c^n = 1$.

(4) De manera genérica, en aquesta teoria, i donada la dualitat que hi ha entre elles, tant les *cadenes* com les *formes* reben el nom de **corrents de de Rham**.

CAPíTOL 6

CONNEXIÓ. DERIVACIÓ COVARIANT. HOLONOMIA

6.1. Connexió en una varietat diferenciable

6.1.1. Connexió lineal i derivada covariant. Donada una varietat diferenciable, M, una connexió lineal és una aplicació dels germens de camps vectorials diferenciables en els germens de tensors $(1,1)$,

$$\begin{array}{rcl} \nabla : TM & \longrightarrow & T^1_1 M \\ v & \mapsto & \nabla v, \end{array}$$

tal que verifica les dues condicions següents:

(1) $\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$, linealitat,
(2) $\nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla v$, $\forall\, f$ funció diferenciable.

La imatge, ∇v, rep el nom de derivada covariant de v (o també el de diferencial absoluta).

Els coeficients de la connexió s'obtenen (com sempre), expandint les imatges d'una base de TM en termes d'una base de $T^1_1 M$:

$$\boxed{\nabla e_i = \gamma^j_{ki} \theta^k \otimes e_j,}$$

on $\{\theta^i\}$ és la base dual de la base $\{e_i\}$.

En fer un canvi de coordenades, aquests coeficients varien de la manera següent:

$$\bar{\gamma}^{j'}_{h'l'} = a^{j'}_i e_{h'}(a^i_{l'}) + a^k_{h'} \gamma^i_{kj} a^{j'}_i a^j_{l'},$$

és a dir que *no* constitueixen un tensor.

Per a un camp vectorial en general, tenim:

$$\nabla v = \nabla(v^i e_i) = dv^i \otimes e_i + v^j \nabla e_j = \left(dv^i + v^j \gamma^i_{kj} \theta^k\right) \otimes e_i,$$

o sigui,

$$\boxed{\nabla v = \left[e_k(v^i) + \gamma^i_{kj} v^j\right] \theta^k \otimes e_i.}$$

Es defineixen les 1-formes de connexió com:

$$\boxed{\omega^i_j = \gamma^i_{kj} \theta^k,}$$

i així tenim que

$$\boxed{\nabla v = (dv^i + \omega^i_j v^j) \otimes e_i.}$$

En la *base natural* de la carta:

$$\boxed{\nabla v = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} v^k\right) dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},}$$

i els coeficients, Γ^i_{jk}, reben el nom de símbols de Christoffel. Com succeïa abans, *no* es comporten com un tensor sota canvi de coordenades, doncs:

$$\bar{\Gamma}^{j'}_{h'l'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{h'}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}}\right) + \frac{\partial x^k}{\partial x^{h'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{kj}.$$

6.1.2. Derivada covariant en la direcció d'un camp vectorial. La derivada covariant en la direcció d'un camp vectorial u es defineix com la contracció:

$$\nabla_u v \equiv (\nabla v)(u, \cdot) = \left[u(v^i) + \gamma^i_{jk} u^j v^k\right] e_i, \quad \nabla_{e_i} e_j = \gamma^k_{ij} e_k.$$

Aquesta derivació covariant és també lineal en u:

$$\nabla_{a_1 u_1 + a_2 u_2} v = a_1 \nabla_{u_1} v + a_2 \nabla_{u_2} v.$$

6.1.3. Transport paral.lel. Geodèsiques.

6.1.3.1. *Transport paral.lel.* Donada a M una connexió lineal, es defineix el transport paral.lel de v al llarg de la corba

$$c : t^{\in I} \mapsto c(t)$$

integral del camp tangent u (en una carta local, U, de M), de la manera següent: direm que v és parale.lel a sí mateix, en ser transportat al llarg de la corba c, sii

$$\nabla_u v = 0, \quad \forall\, t \in I, \quad \text{amb} \;\; u = \frac{dc}{dt}.$$

6.1.3.2. *Geodèsica afí.* Una geodèsica afí a la varietat M és tota corba c tal que es satisfà que existeix una funció real, $\lambda(t)$, amb

$$\nabla_u u = \lambda(t)\, u, \qquad u = \frac{dc}{dt}.$$

Sempre es pot aconseguir, mitjançant un canvi convenient de paràmetre,

$$s = s(t), \quad \bar{c}(s) = c(t), \quad \bar{u} = \frac{d\bar{c}}{dt},$$

posar l'equació d'aquesta manera:

$$\boxed{\nabla_{\bar{u}} \bar{u} = 0,}$$

que molts cops es pren directament com la definició de geodèsica. Es diu que s és un paràmetre afí.

Exercicis.

(1) Demostrar que aquesta darrera definició es pot prendre efectivament com la definició de geodèsica, sense cap pèrdua de generalitat.
(2) Trobar l'expressió del paràmetre afí, s, com a funció del paràmetre arbitrari t.

6.1.4. Extensió de la derivada covariant a tota la capa tensorial. Es fa mitjançant els següents requeriments o *axiomes*:

(1) $\nabla_v f = v(f), \quad \forall\, f$ funció diferenciable.
(2) $\nabla_v(u_1 + u_2) = \nabla_v u_1 + \nabla_v u_2,$ linealitat.
(3) $\nabla_v(u_1 \otimes u_2) = (\nabla_v u_1) \otimes u_2 + u_1 \otimes (\nabla_v u_2),$ regla de Leibniz.
(4) ∇_v commute amb les contraccions, i, dels tensors.

Exercicis.

(1) Demostrar que la derivada covariant d'un camp d'1-formes ω ve donada per:
$$(\nabla_v \omega)(u) = \nabla_v(\omega(u)) - \omega(\nabla_v u).$$
(2) Demostrar que la derivada d'un camp tensorial tal com ara:
$$t = t^i_{jk}\; e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k$$
ve donada per:
$$\nabla_v t = v^h \left[e_h(t^i_{jk}) + \gamma^i_{hm} t^m_{jk} - \gamma^m_{hj} t^i_{mk} - \gamma^m_{hk} t^i_{jm} \right]\; e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k.$$
(3) Demostrar que les components del tensor derivat (les que hi ha entre els parèntesis quadrats) es transformen com un tensor $(3,1)$ sota canvis de coordenades.
(4) Observant l'extraordinària similitud d'aquesta construcció amb la de la derivada de Lie, posar de manifest, una per una, quínes són les seves propietats comunes.
(5) Remarcar ara quínes són, explícitament, les diferències entre ambdues definicions de derivada.
(6) Idem pel que fa a les seves interpretacions física i matemàtica.

6.1.5. Torsió i curvatura d'una connexió.

6.1.5.1. *Torsió.* Es defineix com
$$\boxed{\tau(u,v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u,v].}$$

6.1.5.2. *Curvatura.* Es defineix com

$$\boxed{\rho(u,v) = \nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u,v]}.}$$

6.1.5.3. *Tensors de torsió i de curvatura.* Éssent ω una l-forma diferenciable i u, v, w camps vectorials tangents, es defineix el tensor de torsió com:

$$T(\omega, u, v) = \omega(\tau(u,v)).$$

El tensor de curvatura és:

$$R(w, \omega, u, v) = \omega(\rho(u,v)(w)).$$

En coordenades locals tenim que (veure-ho, com a *exercici*):

$$\boxed{T^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - \gamma^i_{kj} - c^i_{jk},}$$

on c^i_{jk} són les constants d'estructura de l'àlgebra de Lie dels camps, $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$, i

$$\boxed{R_i{}^j{}_{kl} = e_k(\gamma^j_{li}) - e_l(\gamma^j_{ki}) + \gamma^j_{km}\gamma^m_{li} - \gamma^j_{lm}\gamma^m_{ki} - c^m_{kl}\gamma^j_{mi}.}$$

I en la base local natural $\{\partial/\partial x^i\}$,

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0,}$$

i per tant les constants d'estructura són zero, i tenim que

$$\boxed{T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},}$$

$$\boxed{R_i{}^j{}_{kl} = \partial_k \Gamma^j_{li} - \partial_l \Gamma^j_{ki} + \Gamma^j_{km}\Gamma^m_{li} - \Gamma^j_{lm}\Gamma^m_{ki}.}$$

6.1.5.4. *Formes de torsió i de curvatura.* Es defineixen com:

$$\begin{aligned} \Sigma^i &= \frac{1}{2} T^i_{jk}\, \theta^j \wedge \theta^k, \\ \Omega_i{}^j &= \frac{1}{2} R_i{}^j{}_{kl}\, \theta^k \wedge \theta^l. \end{aligned}$$

6.1.5.5. *Equacions estructurals de Cartan.* En termes de la 1-forma de connexió, $\omega_j{}^i = \gamma^i_{jk}\theta^k$, podem escriure les formes de torsió i de curvatura de la manera següent:

$$\boxed{\Sigma^i = d\theta^i + \omega_j{}^i \wedge \theta^j,}$$

$$\boxed{\Omega_i{}^j = d\omega_i{}^j + \omega_i{}^m \wedge \omega_m{}^j.}$$

6.1.5.6. *Proposició: identitats de Bianchi.*

$$(a)\qquad \sum_{(kli)} R_{i\ kl}^{\ j} = \sum_{(kli)} \left(\nabla_k T^j_{li} - T^m_{ki} T^j_{ml}\right);$$

$$(b)\qquad \sum_{(jkl)} \nabla_j R_{i\ kl}^{\ m} = \sum_{(jkl)} T^h_{kj} R_{i\ hl}^{\ m};$$

on les sumes es fan per totes les permutacions cícliques dels índexs entre parèntesis, i les darreres igualtats reben el nom d'identitats de Bianchi.

Exercici. Demostrar les equacions estructurals de Cartan i les identitats de Bianchi, amb l'ajut d'algun llibre).

6.1.6. Connexió riemanniana. En una varietat riemanniana (varietat diferenciable que té una mètrica, g, camp tensorial covariant d'ordre dos simètric definit positiu, o negatiu), la connexió riemanniana és l'única connexió lineal que satisfà:

(1) $\boxed{T = 0,}$ és sense torsió,
(2) $\boxed{\nabla g = 0,}$ és a dir que $\nabla_v g = 0,\ \forall\, v \in TM$.

Exercicis.

(1) Demostrar que en una varietat riemanniana es pot definir una i una sola connexió riemanniana.
(2) Demostrar que en una connexió riemanniana els símbols de Christoffel venen donats per:

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln |g|^{1/2},} \quad \text{i} \quad g^{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}.$$

(3) Demostrar que, en una connexió riemanniana, l'operador divergència, definit com

$$\text{div } v = \nabla_i v^i,$$

ve donat per:

$$\boxed{\text{div } v = |g|^{-1/2}\, \partial_i \left(|g|^{1/2} v^i\right).}$$

La idea és construir directament els coeficients de la connexió, cosa que es pot fer, amb el resultat següent:

$$\boxed{\gamma_{ijk} = -\frac{1}{2}(c_{ikj} + c_{jki} + c_{kji}) + \frac{1}{2}\left[e_k(g_{ij}) + e_j(g_{ik}) - e_i(g_{kj})\right].}$$

En particular, en la base natural,

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{ih}\left(\partial_k g_{jh} + \partial_j g_{kh} - \partial_h g_{jk}\right), \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj},}$$

els símbols de Christoffel són simètrics respecte als índexs covariants. I en la base ortonormal, amb $g_{ij} = \pm\delta_{ij}$,

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(c_{ijk} + c_{jik} + c_{kij}), \quad \gamma_{ijk} = -\gamma_{kji}.$$

6.1.6.1. *Propietats del tensor de curvatura d'una connexió riemanniana.* Algunes d'elles són aquestes:

(1) $R_i{}^j{}_{kl} = -R_i{}^j{}_{lk}$;
(2) $\sum_{(ikl)} R_i{}^j{}_{kl} = 0$;
(3) $\sum_{(mkl)} \nabla_m R_i{}^j{}_{kl} = 0$, identitats de Bianchi;
(4) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
(5) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Exercici. Demostrar-les.

6.1.6.2. *Tensor de Ricci.* És, per definició, la contracció següent del tensor de curvatura:

$$R_{ij} = R_i{}^k{}_{jk}.$$

És simètric:

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

La seva expresió en la base natural de coordenades és:

$$\boxed{R_{ij} = \partial_j \Gamma^k_{ki} - \partial_k \Gamma^k_{ji} + \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ji}.}$$

6.1.6.3. *Escalar de curvatura.* És la contracció del tensor de Ricci:

$$\boxed{R = g^{ij} R_{ij}.}$$

Hom té que:

$$\boxed{\nabla_j \left(R_i{}^j - \frac{1}{2}\delta_i{}^j R\right) = 0,}$$

que és la identitat de Bianchi contreta.

6.1.6.4. *Equacions estructurals de Cartan en una varietat riemanniana.* Tenen la forma:

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j{}^i,$$

$$\Omega_i{}^j = d\omega_i{}^j - \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j, \qquad \text{on} \quad \Omega_i{}^j = \frac{1}{2} R_i{}^j{}_{kl} \theta^k \wedge \theta^l.$$

En una varietat amb molta simetria aquestes formes estructurals són suficients per calcular totes les components del tensor de curvatura $R_i{}^j{}_{kl}$.

6.1.6.5. *Varietat plana.* Una varietat es diu plana si el seu tensor de curvatura és zero. Resulta aleshores que cada punt té un entorn isomètricament equivalent a un entorn de l'espai eclidià.

Exemple. Un exemple no trivial de varietat plana és el torus pla en quatre dimensions (no n'hi ha en tres dimensions), donat per la parametrització: $f(x, y) = (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y)$.

Teorema (Bieberbach). Les úniques varietats planes compactes són els torus. I el recobridor universal d'una varietat plana completa (i.e., tota geodèsica és isomorfa a la recta real) és el propi espai euclidià.

Exercici. Esbrinar la interpretació geomètrica del tensor de curvatura i aprofundir en els conceptes aquí esmentats.

6.1.6.6. *Derivada exterior.* En una connexió riemanniana, la diferencial exterior coincideix amb el que s'anomena derivada exterior respecte de la connexió. Això és, donada una p-forma

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \cdots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

tenim que

$$d\omega = \frac{1}{p!} \partial_j \omega_{i_1 \cdots i_p} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

i donat que en una connexió riemanniana la torsió val zero

$$\boxed{d\omega = \frac{1}{p!} \nabla_j \omega_{i_1 \cdots i_p} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.}$$

Hom defineix l'operador δ com

$$\boxed{\delta\omega = -\frac{1}{(p-1)!} \nabla^j \omega_{j i_1 \cdots i_{p-1}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}}.}$$

6.1.6.7. *Laplacià.* Ve donat per:

$$\boxed{\triangle = d\,\delta + \delta\, d.}$$

Una forma diferenciable, ω, és harmònica si

$$\boxed{\triangle\omega = 0.}$$

6.1.6.8. *Propietats del Laplacià.* El Laplacià té la propietat de commutar amb els tres operadors següents: la dualitat de Hodge, la diferencial exterior i l'operador δ, és a dir:

(1) $^*\triangle = \triangle^*$,
(2) $\delta\,\triangle = \triangle\,\delta$,
(3) $d\,\triangle = \triangle\, d$.

6.2. Connexió en un fibrat principal

Sigui (E, M, π, G) un fibrat principal. Una connexió a E consisteix, simplement, a donar una *correspondència canònica entre les fibres* (recordem que són totes difeomorfes a G) al llarg d'una corba de la varietat base M. És, doncs, un concepte bastant senzill, cosa que no l'allibera de tenir una aura de misteri i complexitat, entre els no experts en aquesta matèria. Se n'acostumen a donar tres definicions equivalents (degudes històricament a autors diversos: Cartan, Ehresman, i Koszul, entre d'altres).

6.2.1. Definició 1 (aixecament horitzontal de l'espai tangent, o distribució diferenciable d'espais horitzontals). Una connexió és una aplicació

$$\boxed{\sigma_p : T_xM \longrightarrow T_pE, \qquad x = \pi(p),}$$

tal que (Fig. 6.1),

(1) σ_p és lineal;
(2) $\pi'\sigma_p = I_{T_xM}$ (és la identitat),
e.g., en 'baixar' la connexió a l'espai base obtenim la identitat;
(3) $\sigma_{\widetilde{R}_g p} = \widetilde{R}'_g \sigma_p, \ \forall\, g \in G$,
sobre la fibra commuta amb l'actuació del propi G;
(4) σ_p depèn diferenciablement de p
($p \mapsto \sigma_p$ és diferenciable).

Sigui ara c una corba diferenciable a la varietat base M:

$$\begin{array}{rcl} c : I^{\subset\mathbb{R}} & \longrightarrow & M \\ t & \mapsto & c(t) \end{array}$$

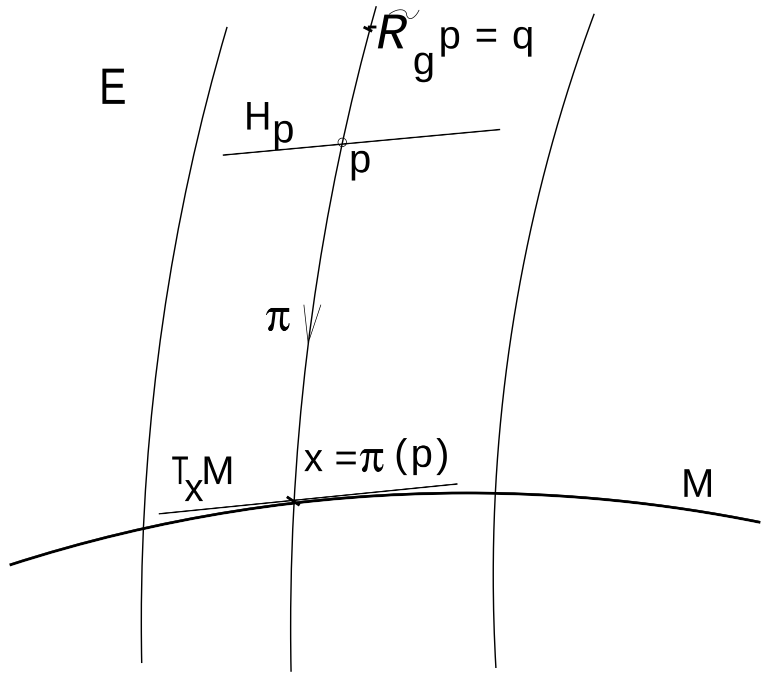


FIGURA 6.1. Esquema de la connexió en un fibrat principal, E, d'espai base M.

amb $x_0 = c(0) \in M$. I sigui p_0 un punt qualsevol de la fibra a x_0:

$$p_0 \in E, \quad \pi(p_0) = x_0.$$

La translació paral.lela de p_0 al llarg de c ve donada aleshores per la corba $\widehat{c}$ ('aixecament horitzontal' de c, Fig. 6.2):

$$\begin{array}{rcll} \widehat{c} : I^{\subset \mathbb{R}} & \longrightarrow & E, & \widehat{c}(0) = p_0, \\ t & \mapsto & \widehat{c}(t), & \dfrac{d\widehat{c}(t)}{dt} = \sigma_{p_0} \dfrac{dc(t)}{dt}. \end{array}$$

Com que σ_p és lineal, l'espai

$$\boxed{H_p = \sigma_p(T_x M), \qquad x = \pi(p),}$$

és un subespai vectorial $H_p \subset T_p E$ que té les següents propietats, les quals es poden prendre directament com a definició alternativa de la connexió.

6.2.2. Definició 2 (distribució diferenciable d'espais verticals). Una visió alternativa de la Def. 1 és la següent: una connexió és una família de subespais (un per a cada punt p de E), $H_p \subset T_p E$, que satisfan:

(1) $\pi' : H_p \longrightarrow T_x M$, $x = \pi(p)$, és un isomorfisme, $\forall\, p \in E$;

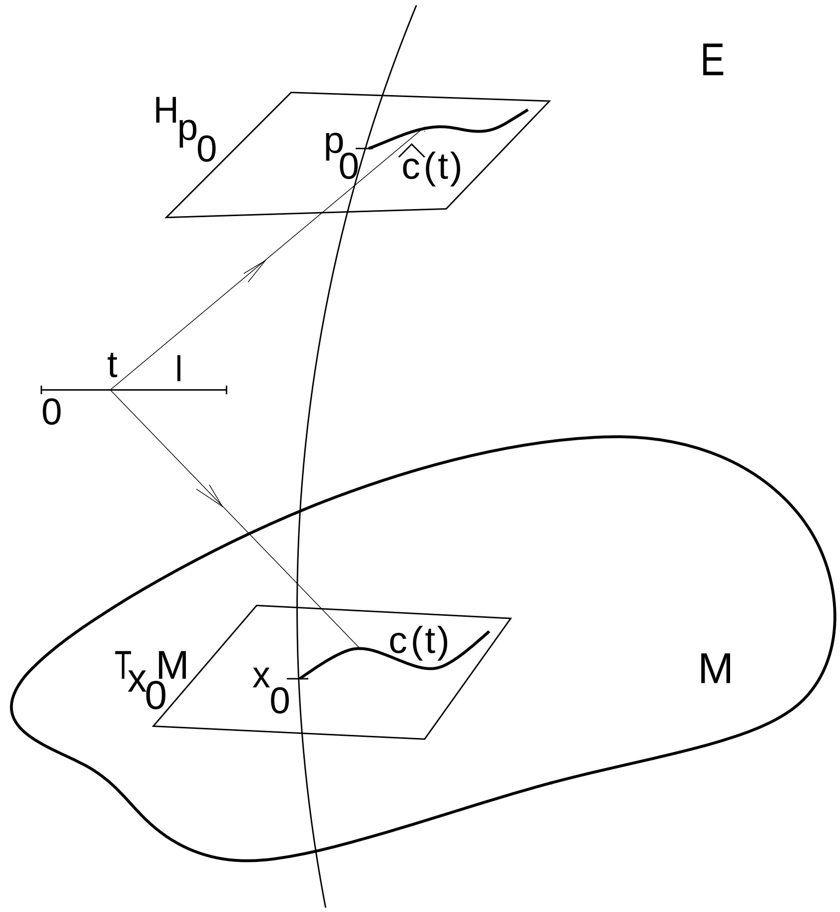


FIGURA 6.2. Aixecament horitzontal d'una corba de la varietat base, gràcies a la connexió del fibrat.

(2) $H_{\widetilde{R}_g p} = \widetilde{R}'_g H_p, \ \forall g \in G$;
(3) H_p depèn diferenciablement de p
($p \mapsto H_p$ és diferenciable).

Aquesta es la definició deguda a Ehresman, per a qui la connexió (en la seva definició primera) és doncs una *distribució diferenciable de subespais horitzontals*. És totalment general i equivalent a la Def. 1. Els H_p reben el nom d'espais horitzontals. Això queda ben clar veient d'on provenien en la Def. 1. S'ha de saber interpretar adequadament què vol dir "donar" una distribució d'espais horitzontals. Vol dir "fixar-los," això és, "concretar-ne" un a cada punt $p \in E$. Això es fa ordinàriament triant una base a cada punt p, de manera que aleshores la connexió es visualitza de forma clara com el *repère mobile* dels francesos o el famós *Vierbein* (en general $m-Bein$) dels alemanys, traduït pels anglesos com *moving frame.*[1] És a dir, donar una connexió és fixar una base del subespai de vectors horitzontals a cada punt $p \in E$. Encara una altra imatge molt emprada és la següent: una connexió equival a donar una projecció (aplicació lineal exhaustiva)

$$h : T_pE \longrightarrow H_p, \qquad \forall\, p \in E.$$

Triant ara una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de T_pE, les imatges per h ens donen una base de H_p (de dimensió igual a dim M, la de la varietat base), que en moure p ens proporciona el *repère mobile* en qüestió.

Donem ara un pas més: usant la trivialitat local del fibrat, farem una descomposició de l'espai tangent T_pE la qual ens portarà de manera immediata a la definició segona, en termes dels espais verticals. En efecte, hom té la següent descomposició de l'espai tangent al fibrat a qualsevol punt p:

$$\boxed{T_pE = H_p \oplus V_p}$$

on, simplement, V_p (espai vertical) és el complement corresponent de H_p. Pot ser caracteritzat, de manera directa així:

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M, \\ \pi' : T_pE &\longrightarrow T_xM, \qquad V_p = \text{Ker } \pi'. \end{aligned}$$

En altres paraules, V_p és l'*espai tangent a la fibra*,

$$\boxed{V_p = T_p(F_x), \quad \pi' V_p = 0.}$$

D'ací el nom de *vectors verticals*.

La definició segona de connexió és la que hem vist al començament d'aquest apartat, pero formulada (amb els mateixos axiomes) en termes dels espais verticals V_p. En aquest cas, els espais horitzontals H_p s'obtindrien com a complements a T_pE dels espais verticals fixats per la connexió.

Encara més, tot vector de Killing és un camp tangent en p a la fibra:

$$\boxed{u(p) = \left. \frac{d\widetilde{R}_{g(t)}p}{dt} \right|_{t=0},} \qquad u(p) \in V_p,$$

i la dimensió de l'espai de camps de Killing a p coincideix amb la dimensió de l'espai de vectors verticals

$$\boxed{\text{dim Killings } = \text{ dim } V_p = \text{ dim } G = \text{ dim } \mathcal{G},}$$

[1] Tot i que, ben mirat, aquesta nomenclatura es fa servir correntment per desplaçaments al llarg d'una corba parametritzada, aquí ens pot ser molt útil en el nostre intent de visualitzar el concepte de connexió.

de manera que existeix un isomorfisme canònic entre V_p i l'àlgebra de Lie $\mathcal{G}$ del grup de Lie G que constitueix la fibra:

$$\begin{array}{ccll} V_p & \longrightarrow & \mathcal{G}, & \text{isomorfisme,} \\ u & \mapsto & \widehat{u}. & \end{array}$$

Tot això ens porta a la darrera definició de connexió.

6.2.3. Definició 3 (1-forma de connexió). Una connexió és una família d'aplicacions lineals,

$$\omega_p : T_pE \longrightarrow \mathcal{G},$$

tal que:

(1) $\omega_p(u) = \widehat{u},\ \forall\, u \in V_p$;
(2) $\omega_{\widetilde{R}_g p}\left(\widetilde{R}'_g v\right) = \ \mathrm{Ad}\ (g^{-1})\, \omega_p(v),\ \forall\, v \in T_pE$;
(3) ω_p depèn diferenciablement de p
($p \mapsto \omega_p$ és diferenciable).

Tot vector de l'àlgebra de Lie, $\gamma \in \mathcal{G}$, genera un subgrup uniparamètric $g'(t)$ del grup G, donat de manera natural per la representació adjunta:

$$\boxed{\mathrm{Ad}\,(g)\gamma = \left.\frac{d(gg'(t)g^{-1})}{dt}\right|_{t=0}.}$$

Si $\{e_\alpha\}$ és una base de $\mathcal{G}$ i $\{\theta^i\}$ és una base de T_p^*E, aleshores tenim, en aquesta definició, la 1-forma de connexió (a valors a $\mathcal{G}$):

$$\boxed{\omega = \omega^\alpha e_\alpha = \omega^\alpha_i \theta^i \otimes e_\alpha}$$

i els vectors horitzontals queden definits aquí per

$$\boxed{v \in H_p \Longleftrightarrow \omega(v) = 0.}$$

Aquesta és la definició en la qual la connexió queda, en efecte, expresada com una 1-forma a valors a $\mathcal{G}$ (àlgebra de Lie del grup estructural del fibrat). Dóna origen, com veurem, al concepte de *curvatura* (2-forma de curvatura a valors a $\mathcal{G}$) que generalitza el concepte de curvatura Gaussiana de les varietats diferenciables.

Exercicis.

(1) Demostrar l'equivalència entre les tres definicions de connexió en un fibrat principal.

(2) Demostrar que la definició de connexió en un fibrat dóna com a cas particular la definició ja vista de connexió en una varietat diferenciable, M. Per això, donada M, cal considerar el *fibrat de les referències* associat (G serà el grup de canvis de base de la varietat). L'aixecament horitzontal d'una corba d'M ens dona la mateixa corba però ara amb una base de l'espai tangent a M en cada punt (*repère mobile* associat a la connexió).

6.2.4. Existència de connexió.

6.2.4.1. *Teorema.* Si M es una varietat diferenciable paracompacta, aleshores en el fibrat principal (E, M, π, G) es pot sempre construir una connexió.

Demostració. Per començar, si E és trivial, aleshores la pròpia descomposició $E \simeq M \times G$ ens dóna directament la connexió.

En el cas general, la idea és fer servir la trivialitat local, per definir *localment* una connexió i després estendre-la a tot el fibrat. Donat un recobriment obert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M, tal que $\pi^{-1}(U_i)$ és trivial, $\forall\, i \in I$, es construeix primer una connexió a $\pi^{-1}(U_i)$, com hem dit, i s'extén després a tot E fent els empalmes oportuns.

En particular, d'els U_i passem al subrecobriment *localment finit* que existeix a M per ser paracompacta. Sigui $\{f_i\}_{i\in I}$ una partició de la unitat subordinada al subrecobriment

$$\sum_{i\in I} f_i(x) = 1, \qquad p = (x, g)$$

(li continuarem dient U_i per no complicar la notació). Sigui ara ω_i la connexió a $\pi^{-1}(U_i)$. Definim aleshores

$$\boxed{\omega = \sum_{i\in I} (\pi' f_i)\omega_i \equiv \sum_{i\in I} \varphi_i \omega_i}$$

(recordem que aquesta suma és localment finita).

Resulta que ω satisfà tots els axiomes i per a un vector arbitrari $v \in T_pE$, hom té

$$\omega(v) = \sum_i \varphi_i \omega_i(v) = \sum_i \varphi_i \widehat{v}_{vert} = \widehat{v}_{vert} \in \mathcal{G}.$$

Exercici. Acabar de completar la demostració, consultant algun dels llibres de la bibliografia sobre fibrats (p.ex. Choquet-Bruhat et al., pàg. 291, o bé C. von Westenholz).

6.2.5. Dos-forma de curvatura d'una connexió.

6.2.5.1. *Derivada covariant exterior.* Sigui ω una k-forma d'un espai fibrat diferenciable, E, a valors en un espai vectorial de dimensió finita, V. Sigui ara h la projecció associada a una connexió donada, σ (com a distribució diferenciable d'espais horitzontals, $\{H_p\}_{p\in E}$),

$$h : T_pE \longrightarrow H_p, \quad hv \equiv v_h \in H_p, \quad V_p \equiv \text{ Ker } h.$$

Es defineix la derivada covariant exterior de ω així

$$\boxed{(\nabla\omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = d\omega(hv_1, \ldots, hv_{k+1}),}$$

és a dir que

$$\boxed{\nabla\omega = d\omega \circ h,}$$

on d és la diferencial exterior ordinària.

6.2.5.2. *Propietats.*

(1) $(\nabla\omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = 0$, si al menys un dels $v_i \in V_p$.

(2) Sigui ρ una representació de G a V. Aleshores:
$$R'_g\ \omega = \rho(g^{-1})\ \omega \Longrightarrow R'_g \nabla\omega = \rho(g^{-1})\nabla\omega.$$

(3) Si $\rho(g) = \text{ad }(g^{-1})$ i $V = \mathcal{G}$, aleshores $\nabla\omega$ és una $(k+1)$-forma tensorial.

6.2.5.3. *Definició de la 2-forma de curvatura.* Donada una 1-forma de connexió ω en un fibrat principal, es defineix la 2-forma de curvatura associada com:

$$\boxed{\Omega = \nabla\omega = d\omega \circ h.}$$

6.2.6. Equacions estructurals d'Elie Cartan. Identitat de Bianchi. Sigui ω una 1-*forma de connexió* en un fibrat principal i Ω la seva 2-*forma de curvatura*. Aleshores es satisfan les equacions estructurals de Cartan:

$$d\omega(v, w) = -[\omega(v), \omega(w)] + \Omega(v, w), \quad \forall\, v, w \in T_pE,$$

on el parèntesi de Lie és a l'àlgebra $\mathcal{G}$ i

$$\Omega^k = d\omega^k + \sum_{i<j} c^k_{ij}\ \omega^i \wedge \omega^j,$$

o també

$$\boxed{\Omega = d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega].}$$

La identitat de Bianchi és, senzillament:

$$\boxed{\nabla\Omega = 0.}$$

Exercicis.

(1) Fer la demostració de tots els passos, en el cas de les equacions estructurals de Cartan, amb l'ajut d'un llibre (p.ex. von Westenholz, pàg. 371).
(2) Demostrar la identitat de Bianchi a partir de la propietat de nilpotència de l'operador.

6.2.7. Connexió plana.

6.2.7.1. *Connexió plana en un fibrat trivial.* En un fibrat principal trivial, (E, M, π, G), amb $E \simeq M \times G$, podem immediatament definir-hi una connexió: a $p = (x, g)$,

$$H_p = T_p(M \times \{g\}) \simeq T_x M, \quad \forall\, g \in G.$$

Per raons òbvies, rep el nom de connexió plana.

Exercici. Demostrar que tota connexió plana té $\Omega = 0$.

6.2.7.2. *Definició general.* En un fibrat principal, (E, M, π, G), direm que una connexió és plana si $\forall\, x \in M$ existeix un entorn U_x tal que la connexió induïda a $\pi^{-1}(U_x)$ és isomorfa a la connexió plana canònica a $U_x \times G$, i.e., si existeix

$$\psi : \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times G, \quad \text{amb} \;\; \psi' : H_p^{(1)} \longrightarrow H_p^{(2)} \quad \text{isomorfisme.}$$

6.2.7.3. *Proposició 1.* Una connexió, ω, és plana $\Longleftrightarrow \Omega = 0$.

6.2.7.4. *Proposició 2.* Si M és paracompacta i simplement connexa, i si $\Omega = 0$, aleshores el fibrat principal és difeomorf al trivial, $M \times G$, i ω és isomorfa a la connexió plana de $M \times G$.

6.2.7.5. *Corolari.* Si M és unidimensional, aleshores tota connexió és plana.

Exercici. Fer la demostració d'aquestes proposicions i corolari.

6.2.8. Holonomia. L'holonomia és la *no-integrabilitat* de la distribució de subespais horitzontals, H_p, corresponents a una connexió del fibrat principal.

Els elements de la forma de curvatura generen l'àlgebra del grup d'holonomia de la connexió. L'elegant teorema d'holonomia, degut a Elie Cartan, va ser demostrat rigorosament per Ambrose i Singer, al MIT, el 1956. En veurem alguns detalls a continuació.

En el que segueix tindrem sempre un fibrat principal, (E, M, π, G), amb una connexió, ω, que com ja hem vist ens dóna un transport paral.lel de les fibres.

6.2.8.1. *Lemma.* Si $\widehat{c_1}$ és un aixecament horitzontal de la corba c a M, aleshores per a qualsevol altre aixecament horitzontal existeix $g \in G$ *fix* tal que

$$\widehat{c_2} = \widehat{c_1}\, g.$$

Observi's que, en principi, g dependria de la seva posició en la corba ($g = g(t)$) però el que es veu precisament és el fet que g és *sempre el mateix*, al llarg de tota la corba (Fig. 6.3).

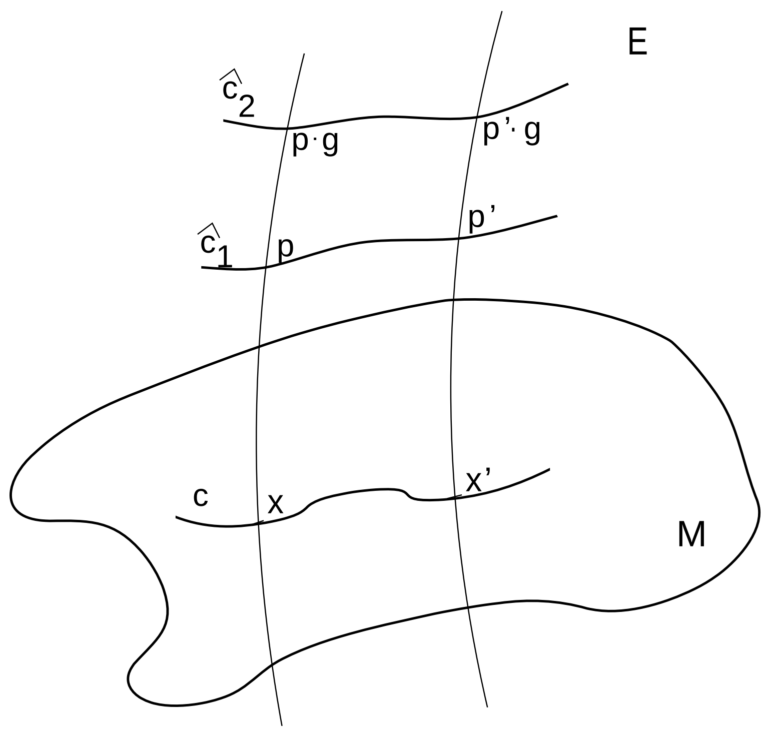


FIGURA 6.3. Dos aixecaments horitzontals d'una mateixa corba de la varietat base, M, de l'espai fibrat E. Es relacionen per un element del grup, $g \in G$.

6.2.8.2. *Grup d'holonomia.* Donada una connexió, ω, en un fibrat principal, (E, M, π, G), considerem C_{x_0} el conjunt de corbes tancades diferenciables a trossos sobre la varietat base, M, amb origen i final a $x_0 \in M$. Constitueix un grup, amb la suma (o composició) de camins definida de la manera habitual —recorrent primer un camí i després l'altre, havent dividit l'interval comú de definició en dues parts i reparametritzant els paràmetres a la meitat (fer-ho com a *exercici*). Evidentment, l'element neutre és el camí trivial, que no es mou mai del punt, x_0, i el simètric d'un camí és el mateix *loop* però recorregut en sentit contrari.

Situats ara en un punt p de la fibra a x_0, $p \in \pi^{-1}(x_0)$, efectuem el transport paral.lel d'aquest punt al llarg de la corba del fibrat que passa per p i és l'aixecament horitzontal de cada corba de la família (grup) C_{x_0} . En tornar sobre la corba base al punt inicial, x_0, el punt d'arribada sobre la corba aixecada *no* serà en general el mateix punt, p, sino un altre punt sobre la fibra d'x_0 (Fig. 6.4). Donada, doncs,

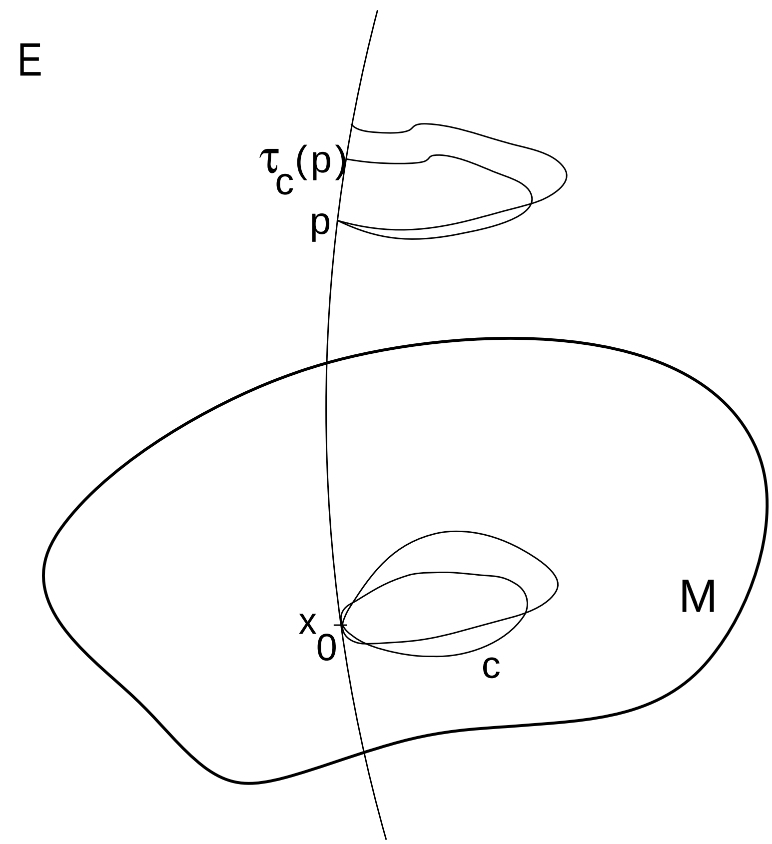


FIGURA 6.4. Representació gràfica de l'holonomia, sobre una fibra donada de l'espai fibrat E.

$c \in C_{x_0}$, obtenim un difeomorfisme de la fibra d'x_0,

$$\tau_c : \pi^{-1}(x_0) \longrightarrow \pi^{-1}(x_0),$$

que commuta amb l'acció del grup G. Aquests difeomorfismes formen també un grup

$$\boxed{\{\tau_c\}_{c \in C_{x_0}} \equiv \Phi_{x_0},}$$

que s'anomena grup d'holonomia a x_0 corresponent a la connexió (d'Ehresmann) ω.[2]

Corresponent al subgrup $C^0_{x_0} \subset C_{x_0}$ de *corbes tancades*, diferenciables a trossos, *contractibles a* x_0, hom té el grup d'holonomia restringit a x_0

$$\boxed{\Phi^0_{x_0} \subset \Phi_{x_0}.}$$

6.2.8.3. *Proposició.* Per a tot punt de la fibra, $p \in \pi^{-1}(x_0)$, existeix un isomorfisme

$$j_p : \Phi_{x_0} \longrightarrow \Phi_p{}^{\subset G},$$

on Φ_p és un subgrup de Lie de G

$$\Phi_p \equiv \{g \in G \,|\, \exists\, c \in C_{x_0} \; : \; \tau_c(p) = R_g p\}$$

(e.g., el subgrup d'elements de G que connecten p amb els punts de la fibra que són els transportats de p per tots els aixecaments de les corbes de C_{x_0}). Una altra manera d'escriure això, pot ser més intuitiva, és

$$\boxed{\Phi_p \equiv \{g \in G \,|\, p \sim p\,g = R_g p\}\,,}$$

on el símbol d'equivalència vol dir que "es comuniquen per una corba horitzontal." A aquesta relació li correspon el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
& \underset{c}{C_{x_0}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{\tau_c}{\Phi_{x_0}} \arrow[rr, "j_p"] & & \underset{g_c}{\Phi_p}
\end{tikzcd}$$

Com abans, també aquí tenim el *subgrup de Lie* corresponent al *grup d'holonomia restringit*: $\Phi^0_p \subset \Phi_p$.

Exercicis.

(1) Demostrar que si $p, p' \in E$ es poden unir amb una corba horitzontal, aleshores $\Phi_p = \Phi_{p'}$.
(2) Demostrar que si això és cert $\forall\, p' \in E$, aleshores $\Phi_p = G$.
(3) Demostrar que, en general, $\Phi_p \subsetneq G$, però que si G és abelià coincideixen.
(4) Demostrar que el grup d'holonomia és un grup de Lie (veure, p.ex., Kobayashi-Nomizu I, pàg. 73).

[2]O σ, o Γ, nomenclatures també molt emprades en aquest cas.

6.2.9. Teorema d'holonomia d'Ambrose-Singer.

6.2.9.1. *Teorema.* L'àlgebra d'holonomia en un punt p_0 d'un fibrat principal (àlgebra de Lie de Φ_{p_0}), està determinada per la 2-forma de curvatura: és la subàlgebra de $\mathcal{G}$ engendrada pels elements de la forma

$$\Omega_p(\widehat{v}, \widehat{w}),$$

on p recorre el conjunt de tots els punts p d'E que hom pot relacionar horitzontalment amb p_0, i $\widehat{v}$ i $\widehat{w}$ són vectors horitzontals arbitraris a p.

6.2.9.2. *Demostració.* La demostració completa d'aquest teorema, juntament amb els seu significat i d'altres qüestions relacionades, està proposada com un dels treballs complementaris al Curs.

Agraïment

L'autor agraeix les interessants discussions, seminaris i intercanvis d'idees que han tingut lloc, en diverses ocasions durant els darrers anys, a Cambridge, Boston, Nàpols i Newton, amb dos dels més grans mestres d'aquesta disciplina: Isadore M. Singer i Robert T. Seeley. Ells li han fet veure alguns conceptes —dins, en torn i més enllà d'aquests bells temes— que sempre havia tingut per força difícils, amb uns nous ulls: molt més amables i a l'hora penetrants, molt més precisos i àdhuc entenedors.

Gràcies de tot cor a la meva família, per haver-me suportat amb paciència durant els mesos mentre escrivia aquestes notes.

El present treball s'ha dut a terme amb fons de la DGI/SGPI, projecte BFM2000-0810, i de la CIRIT (Generalitat de Catalunya), contractes 2002BEAI400019, 2001ACES00014, 2001SGR-00427 i 1999SGR-00257.

Treballs d'estudi i recerca proposats

(1) La geometrització Lie de la Mecànica Analítica.
Refs. [**1, 4**]; R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd Ed. (Perseus Pr., 1994); A.J. Chorin and J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd Ed. (Springer, Berlin, 1994); J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, 2nd Ed. (Springer, Berlin, 1999).

(2) Fibrats i teories *gauge*.
Refs. [**1, 4, 11, 14, 12**]; G. Svetlichny, *Preparation for Gauge Theory*, math-ph/9902027; Y. Guttmann and H. Lyre, *Fiber Bundle Gauge Theories and "Field's Dilemma"*, physics/0005051.

(3) La geometria dels monopols magnètics.
Refs. [**18, 4, 11, 10**]; Y. Guttmann and H. Lyre, *Fiber Bundle Gauge Theories and "Field's Dilemma"*, physics/0005051.

(4) Àlgebres de Lie: classificació, estructura diagramàtica.
Refs. [**7, 16, 22**]; H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, 2nd Ed. (Frontiers in Physics, Perseus, 1999); J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 3rd Ed. (Springer, Berlin, 1997); V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations* (Springer, Berlin, 1999); R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications* (Wiley, New York, 1974); J.A. de Azcárraga and J.M. Izquierdo, *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and some Applications in Physics* (Cambridge U. P., 1998).

(5) Representacions de les àlgebres de supersimetria.
Ref. [**22**]; P.K. Townsend, *M-theory from its Superalgebra*, Cargese lectures 1997, hep-th/9712004; J. Figueroa-O'Farrill, *BUSSTEPP Lectures on Supersymmetry*, hep-th/0109172; J.M. F. Labastida and C. Lozano, *Lectures in Topological Quantum*

Field Theory, hep-th/9709192; S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge U. P., 1995, 1998).

(6) Superfícies de Riemann.
Ref. [**17**]; A. Beardon, *Riemann Surfaces: A Primer*, 2nd Ed. (Cambridge U. P., 2003); O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces* (Springer, Berlin, 1982).

(7) Complexos simplicials: homologia i cohomologia.
Refs. [**1, 4**]; I.H. Madsen and J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes* (Cambridge U. P., 1997); S. Sternberg and V. Guillemin, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory* (Springer, Berlin, 1999); J.F. Jardine and P.G. Goerss, *Simplicial Homotopy Theory* (Birkhauser, Berlin, 1999); Chuangyin Dang, *Triangulations and Simplicial Methods*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 421 (Springer, Berlin, 1995); P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry* (Wiley, New York, 1978).

(8) El teorema d'Atiyah-Singer.
Refs. [**25, 15**]; P. Shanahan, *The Atiyah-Singer Index Theorem: An Introduction* (Springer, Berlin, 1978).

(9) El teorema d'Ambrose-Singer.
Refs. [**11, 15**]; W. Ambrose and I.M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953) 428-443; R.L. Bishop and R.J. Crittenden, *Geometry of Manifolds* (AMS Chelsea Publishing, 2001); J.-P. Magnot, *Structure groups and holonomy in infinite dimensions*, math.DG/0212160.

(10) Teoremes de singularitat a Relativitat General.
Ref. [**13**]; S.W. Hawking and R. Penrose, *The Nature of Space and Time* (Princeton U. P., 2000); S.W. Hawking and G.F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge U. P., 1975); S.W. Hawking and W. Israel, in *General Relativity: an Einstein Centenary Survey* (Cambridge U. P., 1975); R.M. Wald, *General Relativity* (U. Chicago Press, Chicago, 1984).

(11) La gravitació vista com una teoria *gauge*.
Refs. [**18, 4, 13**]; R.M. Wald, *General Relativity* (U. Chicago Press, Chicago, 1984); P. Ramond, *Field Theory: A Modern*

Primer, 2nd Ed. (Perseus Press, 2001); S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, New York, 1972).

(12) Iniciació a la topologia algebraica.
E.H. Spanier, *Algebraic Topology* (Springer, Berlin, 1995); D. Husemoller, *Fibre Bundles* (Springer, Berlin, 1994); S.I. Gelfand and Y.I. Manin, *Homological Algebra* (Springer, Berlin, 1999).

(13) Teoria de la mesura.
Ref. [**2**]; M. Spivak, *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus* (Westview Press, June 1965) [Trad. Ed. Reverté]; W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd Ed. (McGraw-Hill, New York, 1991).

(14) Introducció rigorosa a la teoria de la probabilitat.
Ref. [**3**]; J. Eldon Whitesitt, *Boolean Algebra and Its Applications* (Dover, New York, 1995).

(15) Funcions zeta d'operadors, determinants i l'anomalia multiplicativa.
E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo, A.A. Bytsenko, and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications* (World Sci., Singapore, 1994); E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions* (Springer, Berlin, 1995); E. Elizalde, J. Comput. Appl. Math. **118** (2000) 125; E. Elizalde, L. Vanzo and S. Zerbini, Commun. Math. Phys. **194** (1998) 613; E. Elizalde, J. Phys. **A 34** (2001) 3025; G. Cognola, E. Elizalde and S. Zerbini, *Dirac Functional Determinant in Terms of the Eta Invariant and the Noncommutative Residue*, Commun. Math. Phys., to appear.

(16) Altres propostes.
Són benvingudes i podran ser degudament considerades, en atenció als interessos específics dels propis estudiants.

Bibliografia

[1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, AND T. RATIU, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications* (Addison-Wesley, New York, 1983). Tercera edició *on line*: www.cds.caltech.edu/∼marsden.

[2] R.G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure* (Wiley, New York, 1995).

[3] M. CAPINSKI AND E. KOPP, *Measure, Integral and Probability* (Springer, Berlin, 1999).

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT, C. DE WITT-MORETTE, AND M. DILLARD-BLEICK, *Analysis, Manifolds and Physics*, Parts I and II (North-Holland, Amsterdam, 1978, 1989).

[5] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Vols. 1 and 2 (Interscience, New York, 1969).

[6] B. SCHUTZ, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge U.P., Cambridge, 1980).

[7] H.F. JONES, *Groups, Representations and Physics* (IOP Publishing, London, 1998).

[8] C. VON WESTENHOLZ, *Differential Forms in Mathematical Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1978).

[9] A. HATCHER, *Algebraic Topology* (Cambridge U.P., Cambridge, 2002). Edició *on line*: www.math.cornell.edu/∼hatcher/#ATI.

[10] T.T. WU AND C.N. YANG, *Concept of non-integrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D12** (1975) 3845-3857.

[11] T. EGUCHI, P.B. GILKEY AND A.J. HANSON, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Phys. Rep. **66** (1980) 213-393.

[12] M. GÖCKELER AND T. SCHÜCKER, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity* (Cambridge U.P., Cambridge, 1987).

[13] C.J. ISHAM, *Modern Differential Geometry for Physicists* (World Sci., Singapore, 1989).

[14] W. GREINER AND B. MÜLLER, *Gauge Theory of Weak Interactions* (Springer, Berlin, 1996).

[15] L. ÁLVAREZ-GAUMÉ AND P. GINSPARG, *The structure of gauge and gravitational anomalies*, Ann. Phys. (NY) **186** (1985) 423-490.

[16] P. GODDARD, *Kac-Moody and Virasoro algebra in relation to Quantum Physics*, Int. J. Mod. Phys. **A1** (1986) 303-414.

[17] H.M. FARKAS AND I. KRA, *Riemann Surfaces* (Springer, New York, 1980).

[18] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics* (IOP Publishing, London, 1990).

[19] C. NASH AND S. SEN, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, London, 1983).

[20] R. Carter, G. Segal and I. MacDonald, *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras* (Cambridge U.P., Cambridge, 1995).

[21] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Dover, New York, 1962).

[22] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics* (Academic Press, London, 1997).

[23] G. Kothe, *Topologische Lineare Räume*, Band I, II, (Springer, Berlin, 1969, 1979).

[24] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*, Chapters 1-5 (Springer, Berlin, 2002).

[25] P.B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem* (Publish or Perish, Wilmington, 1984).

[26] J. Roe, *Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods* (Longman, London, 1988).

[27] E. Elizalde, *Compendio de Métodos Algebraicos, Geométricos y Probabilísticos* (CPDA-ETSEIB, Barcelona, 1985).

E. Elizalde, *Métodos Matemáticos I: Álgebra Lineal y Multilineal* (CPDA-ETSEIB, Barcelona, 1981).

E. Elizalde, *Métodos Matemáticos II: Geometría Diferencial* (CPDA-ETSEIB, Barcelona, 1982).

E. Elizalde, *Métodos Matemáticos III: Teoría de la Probabilidad y Estadística* (CPDA-ETSEIB, Barcelona, 1983).

E. Elizalde, *Métodos Matemáticos Analíticos* (Ed. PPU, Barcelona, 1992).